解析学 II　メモ

本講義における定義，命題，定理等について，その内容を簡単にまとめたものです．本講義の流れを理解するための一助としていただければ幸いです．

５．１変数関数の微分（つづき）

まずは，解析学 I で学習した次の定理を復習しよう．

Th. 次は同値である．

① $f(x)$ は $x = x_0$ で微分可能である．(i.e., $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ が存在する)

② $\exists A \in \mathbb{R}$, $\exists \varphi(x)$：$x = x_0$ の近傍で定義された関数
s.t. $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \varphi(x)\,(x - x_0)$ かつ $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$.
（このとき，$A = f'(x_0)$）

③ $\exists g(x)$：$x = x_0$ の近傍で定義された関数
s.t. $f(x) = f(x_0) + g(x)\,(x - x_0)$ かつ $g(x)$ は $x = x_0$ で連続である．
（このとき，$g(x_0) = f'(x_0)$）

この定理の ① と ② が同値であるということは，微分可能であることと接線が存在することが同値である（即ち，微分可能 $\iff$ 1 次式で近似できる）ということを表している．また，③ は ② の言い換えであり，この同値命題を用いて合成関数の微分や逆関数の微分に関する定理を証明した．

ここで，極限における「収束の速さ」を比べる記号である**ランダウの記号**について述べよう．例えば，$u(x) = x^3$ と $v(x) = x^2$ は，$x \to 0$ のときどちらも 0 に収束するが，

x	$u(x)$	$v(x)$
0.1	0.001	0.01
0.01	0.000001	0.0001
0.001	0.000000001	0.000001
⋮	⋮	⋮

であり，$u(x)$ の方が $v(x)$ より「速く」0 に収束する．これを $u(x) = o\big(v(x)\big)\ (x \to 0)$ と書くことにする．正確な定義は次の通りである．

Def.（ランダウの記号） $u(x)$, $v(x)$ を $x = a$ を除く $x = a$ の近傍で定義された関数で，$\lim_{x \to a} u(x) = \lim_{x \to a} v(x) = 0$ とする．

① $u(x) = o\big(v(x)\big)\ (x \to a)$ （$x \to a$ のとき $u(x)$ は $v(x)$ より**高位の無限小**である）
$\overset{\text{def}}{\iff} \exists \varphi(x)$：$x = a$ を除く $x = a$ の近傍で定義された関数
s.t. $u(x) = \varphi(x)v(x)$ かつ $\lim_{x \to a} \varphi(x) = 0$.　（平たく言えば，$\lim_{x \to a} \dfrac{u(x)}{v(x)} = 0$）

② $u(x) = O\big(v(x)\big)\ (x \to a)$
$\overset{\text{def}}{\iff} \exists U$：$x = a$ を除く $x = a$ の近傍, $\exists M > 0$, $\exists \varphi(x)$：U 上の関数
s.t. $u(x) = \varphi(x)v(x)$ かつ $|\varphi(x)| \leq M\ (\forall x \in U)$.
（平たく言えば，$\dfrac{u(x)}{v(x)}$ が $x = a$ の近くで有界）

また，$u(x) = O\big(v(x)\big)\ (x \to a)$ かつ $v(x) = O\big(u(x)\big)\ (x \to a)$ であるとき，「$x \to a$ のとき $u(x)$ と $v(x)$ は**同位の無限小**である」と呼ぶ．なお，$x \to a$ であることが文脈から明らかであるときは「$(x \to a)$」 を省略することもある．また，$u(x) = o\big(v(x)\big)\ (x \to \infty)$ なども同様に定義される．

Ex. $x^3 = o\big(x^2\big)\ (x \to 0)$ は真である．だが，$x^3 = O\big(x^2\big)\ (x \to 0)$ も真である．

Rem.

① $f(x)$ が $x = x_0$ で微分可能
$\overset{\text{同値}}{\iff} \exists A \in \mathbb{R}$ s.t. $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)\ (x \to x_0)$.

② $o\big(v(x)\big)$ や $O\big(v(x)\big)$ は特定の関数を表しているわけではない．
例えば，$\begin{cases} f(x) = o\big(v(x)\big) \\ g(x) = o\big(v(x)\big) \end{cases} (x \to a)$ のとき，$f(x) - g(x) = o\big(v(x)\big)\ (x \to a)$ だが，$f(x) - g(x) = 0$ とは限らない．

③ $n \in \mathbb{N}$ とする．このとき，

$$g(x) = O\big((x-a)^n\big)\ (x \to a) \implies g(x) = o\big((x-a)^{n-1}\big)\ (x \to a)$$

が成り立つ．しかし，逆は成り立たない．

Def. $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が $x = x_0$ で微分可能であるとき，$f(x)$ は $x = x_0$ で **2 回微分可能** であるという．（「区間 I 上で 2 回微分可能」や「n 回微分可能」も同様に定義される）

$f'(x)$ が I 上で微分可能であるとき，$f'(x)$ の導関数を $f''(x)$, $f^{(2)}(x)$, $\dfrac{d^2 f}{dx^2}(x)$ などと表し，$f(x)$ の **2 階導関数**と呼ぶ．同様に，***n* 階導関数** $f^{(n)}(x)$（または $\dfrac{d^n f}{dx^n}(x)$, $\dfrac{d^n}{dx^n} f(x)$）も $f^{(n)}(x) = \big(f^{(n-1)}(x)\big)'$ として同様に定義される．

Def. I を区間，$n \in \mathbb{N}$ とするとき，

- $C^n(I) = \{f : I \to \mathbb{R} \mid f(x)$ は I 上 n 回微分可能，かつ $f^{(n)} \in C(I)\}$.
- $C^\infty(I) = \{f : I \to \mathbb{R} \mid$ 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f(x)$ は I 上 n 回微分可能 $\}$
$= \{f : I \to \mathbb{R} \mid$ 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f \in C^n(I)\}$
$= \bigcap_{n=0}^{\infty} C^n(I)$.

$C(I)$ は I 上で連続な関数全体の集合であるが，これを $C^0(I)$ と書くこともある．

Th.（ライプニッツの定理） $n \in \mathbb{N}$ とする．$f(x), g(x)$ が区間 I 上で n 回微分可能ならば

$$\big(f(x)g(x)\big)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x) \qquad \cdots\cdots (*)$$

が成り立つ．ただし，$f^{(0)}(x) = f(x)$, $g^{(0)}(x) = g(x)$ とする．

ライプニッツの定理の結論は「$f(x)g(x)$ が I 上で n 回微分可能であり，かつ $(*)$ が成り立つ」という意味であることに注意して欲しい（←この手の注意は，これまでも何度か出てきた話ではあるが）．学生の皆さんには，ライプニッツの定理に関するレポート問題・演習問題を解くことにより練習を積むことを望む．

６．リーマン積分

今節では 1 変数関数の積分について学習する．積分は微分よりも歴史が古く，紀元前に遡る．アルキメデスによる放物線と直線で囲まれた面積を求める方法はユークリッドの『原論』にも書かれている．17 世紀後半にニュートン・ライプニッツにより微分積分学の基本定理が得られ，微分と積分が互いに（ほぼ）逆演算であることが認識された．19 世紀に入るとリーマンにより定積分が厳密に定式化された．今節では 1 変数関数のリーマン積分について学ぶ．なお，20 世紀に入るとルベーグにより新たな積分の概念が定式化（一般化）され，現代解析学や確率論の礎となっているのだが，ルベーグ積分については 3 年生の解析学 A で学ぶことになる．

$f(x)$ を $I=[a,b]$ 上で有界な関数である（即ち，$\exists C>0$ s.t. $\forall x\in I,\ |f(x)|\le C$）とする[1]．$I=[a,b]$ を

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

によって分割する．この分割を Δ と名付ける．$k=1,2,\dots,n$ に対し

$$M_k=\sup_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x),\qquad m_k=\inf_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)$$

とおき，さらに

$$S_\Delta=S_\Delta(f)=\sum_{k=1}^{n} M_k(x_k-x_{k-1})\ \textbf{（過剰和）},\quad s_\Delta=s_\Delta(f)=\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k-x_{k-1})\ \textbf{（不足和）}$$

と定める．

Def. Δ_1,Δ_2 を $[a,b]$ の分割とする．Δ_1 の分点が全て Δ_2 の分点となっているとき，Δ_2 は Δ_1 の**細分**であるといい，$\Delta_1\subset\Delta_2$ と書く．

Prop. Δ, Δ_1, Δ_2 を $[a,b]$ の分割とする．

① $s_\Delta\le S_\Delta$.　　② $\Delta_1\subset\Delta_2\Longrightarrow\begin{cases}s_{\Delta_1}\le s_{\Delta_2}\\ S_{\Delta_1}\ge S_{\Delta_2}\end{cases}$.

③ （任意の分割 Δ_1, Δ_2 に対して）$s_{\Delta_1}\le S_{\Delta_2}$.

この命題により，

$$S=S(f)=\inf\{S_\Delta\mid \Delta\text{ は }[a,b]\text{ の分割}\}\quad\textbf{（上積分）},$$
$$s=s(f)=\sup\{s_\Delta\mid \Delta\text{ は }[a,b]\text{ の分割}\}\quad\textbf{（下積分）}$$

が定義できる．

問 $s\le S$ を示せ．

Def. $f(x)$ を $I=[a,b]$ 上で有界な関数とする．

① $f(x)$ が I 上で**（リーマン）積分可能** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\ s=S$.

② ① のとき，$s\,(=S)$ の値を $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ と書き，$f(x)$ の I 上の**定積分**と呼ぶ．

[1] $f(x)$ は必ずしも $I=[a,b]$ 上で連続であるとは限りません．

Rem. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ も $\displaystyle\int_a^b f(s)\,ds$ も $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ も同じものを表す（x や s や t という文字に特別な意味はない）.

問 $f(x)\equiv c$（定数）なら，$f(x)$ は $I=[a,b]$ 上で積分可能であり，$\displaystyle\int_a^b c\,dx=c(b-a)$ であることを示せ.

では，どのような関数が閉区間 $I=[a,b]$ 上でリーマン積分可能であるか？ まずは，リーマン積分可能で**ない**関数の例を挙げよう.

Ex. $f(x)=\begin{cases}1 & (x\in\mathbb{Q})\\ 0 & (x\notin\mathbb{Q})\end{cases}$ は $I=[0,1]$ 上でリーマン積分可能では**ない**[2].

一方で，次の定理で見るように，$I=[a,b]$ 上の連続関数は必ず積分可能である.

Th. $f\in C\big([a,b]\big)$ ならば，$f(x)$ は $[a,b]$ 上でリーマン積分可能である.

なお，$f\in C\big([a,b]\big)$ のとき，$f(x)$ は $[a,b]$ 上で有界であることに注意する．この定理の証明には準備が必要である．まず，以下に述べる**ダルブーの定理**を証明し，次に「$f(x)$ が $I=[a,b]$ 上で積分可能であること」と同値な命題を挙げよう.

Def. $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ に対し，

$$d(\Delta)=|\Delta|=\max_{i=1,\dots,n}(x_k-x_{k-1})\quad\text{（分割 }\Delta\text{ の幅）}$$

と定める.

Th.（ダルブーの定理） $f(x)$ を $I=[a,b]$ 上で有界な関数とする．このとき，

$$\begin{cases}\displaystyle\lim_{|\Delta|\to0}S_\Delta=S\quad(\text{i.e., }\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0\text{ s.t. }|\Delta|<\delta\Longrightarrow|S_\Delta-S|<\varepsilon),\\ \displaystyle\lim_{|\Delta|\to0}s_\Delta=s\end{cases}$$

が成り立つ.

Def. $f(x)$ を $I=[a,b]$ 上で有界な関数，$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ を I の分割とし，$\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ を Δ の各小区間の代表点とする．このとき，

$$R_{\Delta;\{\xi_k\}}=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\,(x_k-x_{k-1})$$

を分割 Δ，代表点 $\{\xi_k\}$ に関する $f(x)$ の**リーマン和**[3]と呼ぶ.

Rem. 常に $s_\Delta\le R_{\Delta;\{\xi_k\}}\le S_\Delta$ が成り立つ.

---

[2]正確には，$f(x)=\begin{cases}1 & (x\in[0,1]\cap\mathbb{Q})\\ 0 & (x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q})\end{cases}$ と書くべきです．また，この関数は lim を用いて $f(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty}\big(\cos n!\pi x\big)^{2k}\right)$ と書くことができます（従って，それほど「不自然」な関数ではありません）.

[3]本当は代表点は $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ と書くべきですし，リーマン和は $R_{\Delta;\{\xi_k\}_{k=1}^n}$ と書くべきですが，略記しています.

Th. 次の 4 条件は同値である.

① $f(x)$ は $I=[a,b]$ 上で積分可能.
② $\forall\varepsilon>0,\ \exists\Delta$：$I$ の分割 s.t. $S_\Delta - s_\Delta < \varepsilon$.
③ $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$ s.t. $|\Delta|<\delta \Longrightarrow S_\Delta - s_\Delta<\varepsilon$.
④ $\exists V\in\mathbb{R}$ s.t.

$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$ s.t. $|\Delta|<\delta$ を満たす任意の I の分割 Δ と任意の代表点 $\{\xi_k\}$ に対して $|R_{\Delta;\{\xi_k\}} - V|<\varepsilon$ が成立する.

（このとき $V=s=S$）

以上の準備の下,「閉区間上の連続関数は必ず積分可能である」という定理を証明することができる.

Rem. 特に $I=[0,1]$, Δ を I の n 等分割 $\left(x_k=\dfrac{k}{n}\right)$ とすると,

$$f(x)\text{ が }I\text{ 上で積分可能 }\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx.$$

が成り立つ（特に，$f\in C(I)$ なら結論は成り立つ ← **区分求積法**）. I を一般の閉区間 $[a,b]$ にし, I の n 等分割の一般の代表点に関して区分求積法を述べたものが次の定理である.

Th.（区分求積法） $f(x)$ が $[a,b]$ 上で積分可能であるならば,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)=\int_a^b f(x)\,dx$$

が成り立つ．ただし，$x_k=a+\dfrac{b-a}{n}k$, $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ である.

定積分に関するいろいろな性質を述べよう.

Th. $f(x)$, $g(x)$ を $[a,b]$ 上で積分可能な関数，$c\in\mathbb{R}$ とする.

① $f(x)+g(x)$ も $[a,b]$ 上で積分可能で，$\displaystyle\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx.$

② $c\,f(x)$ も $[a,b]$ 上で積分可能で，$\displaystyle\int_a^b \big(c\,f(x)\big)\,dx=c\int_a^b f(x)\,dx.$

③ $f(x)\le g(x)\ (\forall x\in[a,b])\Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx.$

特に，$f(x)\ge 0\ (\forall x\in[a,b])\Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\ge 0.\ \cdots\cdots(*)$

さらに，もし $f\in C([a,b])$ ならば，$(*)$ の等号は $f(x)\equiv 0$ のときのみ成り立つ.

④ $|f(x)|$ も $[a,b]$ 上で積分可能で，$\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\le\int_a^b |f(x)|\,dx.$

⑤ $f(x)g(x)$ も $[a,b]$ 上で積分可能である.

Rem. $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx=\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$ は一般には成り立たない！

Th. $f(x)$ を $[a,b]$ 上で積分可能な関数で，$c \in (a,b)$ とする．このとき，$f(x)$ は $[a,c]$ 上および $[c,b]$ 上で積分可能であり，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad \cdots\cdots (*)$$

が成り立つ．

Rem. 定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は $a < b$ のときしか定義していなかったが，

$$a > b \text{ のとき } \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx,$$
$$a = b \text{ のとき } \int_a^b f(x)\,dx = 0$$

と**定義**すると，$(*)$ は任意の a,b,c で成立する．（ただし，積分可能性は仮定する）

問 チェックせよ．

Th.（積分の平均値の定理） $f \in C([a,b])$ ならば，

$$\exists \xi \in (a,b) \text{ s.t. } \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a)$$

が成り立つ．

Def. I を区間とする．

① $f, F : I \to \mathbb{R}$ とする．
$F(x)$ が $f(x)$ の**原始関数** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $F(x)$ は I 上で微分可能で，$F'(x) = f(x)$ $(\forall x \in I)$.

② $f(x)$ を I 内の任意の閉区間上で積分可能な関数とする（特に $f \in C(I)$ なら O.K.）．
$a \in I$ を一つ定めたとき，$\displaystyle G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ $(x \in I)$ で定まる I 上の関数 $G(x)$ を $f(x)$ の**不定積分**と呼ぶ．

Rem. 教科書では不定積分の定義を「原始関数に定数を加えたもの」としている．本によっていくつかの流儀がある．（← 補足プリント No.2）

Th. $f(x)$ を区間 I 内の任意の閉区間上で積分可能な関数，$a \in I$ とし，$\displaystyle F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ とおく．このとき，

① $F \in C(I)$.

② もし $f \in C(I)$ ならば，$F(x)$ は I 上で微分可能であり $\dfrac{d}{dx}F(x) = f(x)$ $(\forall x \in I)$ が成り立つ．

Rem.

- $f(x)$ が連続でなければ，$F'(x) = f(x)$ になるとは限らない．
  （つまり，不定積分は原始関数であるとは限らない）
- しかし，$f(x)$ が 1 点 $x = x_0$ で連続ならば，$F(x)$ は $x = x_0$ で微分可能で $F'(x_0) = f(x_0)$ である．

Prop. 原始関数は加法的定数を除いて一意である．即ち，$F_1(x), F_2(x)$ が $f(x)$ の原始関数ならば，$F_1(x) - F_2(x) \equiv C$（定数）が成り立つ．

Rem. 不定積分も加法的定数を除いて一意である．

特に，$f \in C(I)$ ならば，$f(x)$ の任意の原始関数は，$a \in I$ を固定すると

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C$$

と書ける．この $F(x)$ を $\displaystyle\int f(x)\,dx$ と表す．

Th.（微分積分学の基本定理） $f \in C([a,b])$ とし，$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とする．このとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \left(= \left[F(x)\right]_a^b \text{ と書く}\right)$$

が成り立つ．

Ex.

- $(\sin x)' = \cos x \Longrightarrow \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1.$
- $(e^x)' = e^x \Longrightarrow \displaystyle\int_0^1 e^x\,dx = \left[e^x\right]_0^1 = e - 1.$
- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Longrightarrow \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$（$C$ は積分定数）．
- $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2} \Longrightarrow \displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$（$C$ は積分定数）．

実際に不定積分・定積分を計算する際によく使われる**部分積分法・置換積分法**を述べよう．具体的な計算のアルゴリズムやテクニックについては，補足プリント No.3 や自習用問題・レポート問題・演習問題等で研鑽を積んでいただきたい．

Th.（部分積分法） $f, g \in C^1([a,b])$ とする．このとき，

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$
$$\left(\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx\right)$$

が成り立つ．

Ex. $\displaystyle\int \arctan x\,dx = \cdots\cdots$.

Th.（置換積分法） $\varphi \in C^1([\alpha,\beta])$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ とし，$f(x)$ を φ の値域 $\big(= \varphi([\alpha,\beta])\big)$ で連続な関数とする．このとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt$$
$$\left(\int f(x)\,dx = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt\right)$$

t	α	$\to$	β
x	$\varphi(\alpha)$	$\to$	$\varphi(\beta)$
$\|$	$\|$		$\|$
$\varphi(t)$	a		b

が成り立つ．

記号． $\boxed{x = \varphi(t) \;\longrightarrow\; dx = \varphi'(t)\,dt}$ （意味づけはできる）

Ex. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\big(\sin t\big)'\,dt$ （$x = \sin t$ と置換）

$$= \cdots\cdots$$

x	-1	$\to$	1
t	$-\dfrac{\pi}{2}$	$\to$	$\dfrac{\pi}{2}$

Rem. $x = \varphi(t)$ と置くのは問題ないが，$t = \psi(x)$ と置くときは，逆関数 $x = \psi^{-1}(t)$ が存在する，即ち $\psi(x)$ が狭義単調増加（or 狭義単調減少）でないといけない．

それを考えずに，例えば

$$\int_{-1}^{1} 2x^2\,dx = \int_1^1 2t\cdot\frac{dx}{2\sqrt{t}} \quad (t = x^2 \text{ とおくと，} dt = 2x\,dx = 2\sqrt{t}\,dx)$$
$$= \int_1^1 \sqrt{t}\,dt = 0$$

としてはいけない．

◎ 今後，講義では「C は積分定数」という記述を省略する．

7．テイラー展開

5章で，$f(x)$ が $x = x_0$ で微分可能であるならば，

$$\exists A \in \mathbb{R} \text{ s.t. } f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0) \quad (x \to x_0)$$

が成り立つことを見た．これは，$x = x_0$ の近傍で $f(x)$ が 1 次関数 $f(x_0) + A(x - x_0)$ で近似できることを意味する（誤差である $o(x - x_0)$ は剰余項と呼ばれる）．本章では，標語的に言えば「$f(x)$ が C^n 級であれば，$f(x)$ は n 次関数で近似できる」ことを見る．

Th.（テイラーの定理（積分形）） I を区間，$a \in I$ とする．このとき，$f \in C^n(I)$ ならば

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\,(x-a)^{n-1} + R_n(x), \quad \cdots\cdots (*)$$

$$\text{ただし，} R_n(x) = \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}\,(x-t)^{n-1}\,dt$$

が成り立つ．

$(*)$ を $f(x)$ の $x = a$ の周りでの（における，を中心とした）**n 次テイラー展開**と呼ぶ．このとき，$f(a) + f'(a)\,(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \cdots + \dfrac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\,(x-a)^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k$ は $f(x)$ を $x = a$ の周りで $(n-1)$ 次式まで展開したものである．また，この $R_n(x)$ の表示式を**ベルヌーイの剰余項**と呼ぶ．

テイラーの定理の積分形は**部分積分**を用いて容易に証明できるが，仮定が $f \in C^n(I)$ と強いものになっている．一方，次に述べるテイラーの定理の微分形は仮定が緩く，使い勝手が良いものである．しかし，どちらも理解して使いこなしてもらいたい．

Th.（テイラーの定理（微分形）） I を区間，$a \in I$ とする．このとき，$f(x)$ が I 上で n 回微分可能ならば

$$\exists \xi : a \text{ と } x \text{ の間 s.t. } f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + \underbrace{\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\,(x-a)^n}_{\| \ R_n(x)}$$

が成り立つ．ただし，$x = a$ のときは $\xi = a$ とする．

この $R_n(x)$ の表示式を**ラグランジュの剰余項**と呼ぶ．$R_n(x)$ は $0 < \theta < 1$ を用いて $R_n(x) = \dfrac{f^{(n)}\big(a + \theta(x-a)\big)}{n!}(x-a)^n$ とも書ける．

Rem. ① $n = 1$ のときが平均値の定理に対応する．
② 剰余項 $R_n(x)$ の表し方は他にもある（ロッシュ・シュレミルヒ，コーシー，……）．

Ex. $x = 0$ の周りでの n 次テイラー展開（**n 次マクローリン展開**ともいう）を考える．以下，$\theta \in (0, 1)$ とする．

① $f(x) = e^x \Longrightarrow e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\,x^k + \frac{e^{\theta x}}{n!}\,x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^{\theta x}}{n!}\,x^n.$

② $f(x)=\sin x \Longrightarrow$

(i) $n=2\ell$ $(\ell\in\mathbb{N})$ のとき

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{(-1)^{\ell-1}}{(2\ell-1)!}\,x^{2\ell-1}+\frac{(-1)^{\ell}\sin\theta x}{(2\ell)!}\,x^{2\ell}.$$

(ii) $n=2\ell+1$ $(\ell\in\mathbb{N}\cup\{0\})$ のとき

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{(-1)^{\ell-1}}{(2\ell-1)!}\,x^{2\ell-1}+\frac{(-1)^{\ell}\cos\theta x}{(2\ell+1)!}\,x^{2\ell+1}.$$

Th. $f(x)$ は $x=a$ の近傍で n 回微分可能，かつ $f^{(n)}(x)$ は $x=a$ で連続である とする．$P_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k$ とおく．このとき，$f(x)-P_n(x)=o\big((x-a)^n\big)$ $(x\to a)$ である．さらに，もし $f(x)$ が $x=a$ の近傍で C^{n+1} 級なら $f(x)-P_n(x)=O\big((x-a)^{n+1}\big)$ $(x\to a)$ である．

この定理で定めた $P_n(x)$ を $f(x)$ の $x=a$ における $\boldsymbol{n}$ **次近似**と呼ぶ．

Ex. $\sin x = x+O(x^2)$ $(x\to 0)$. ← $\boldsymbol{n=1}$ として後半を適用

$\sin x = x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)$ $(x\to 0)$. ← $\boldsymbol{n=3}$ として前半を適用

$\sin x = x-\dfrac{1}{6}x^3+O(x^4)$ $(x\to 0)$. ← $\boldsymbol{n=3}$ として後半を適用

$\sin x = x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^4)$ $(x\to 0)$. ← $\boldsymbol{n=4}$ として前半を適用

$\sin x = x-\dfrac{1}{6}x^3+O(x^5)$ $(x\to 0)$. ← $\boldsymbol{n=4}$ として後半を適用

$\log(1+x) = x-\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)$ $(x\to 0)$.

テイラーの定理の応用として，**極限値の計算**をすることができる．講義では例として

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2\sin x}=\frac{1}{6},\qquad \lim_{x\to+0}\frac{\log\big(\sin x\big)}{\log x}=1$$

を扱う予定だが，学生の皆さんにはレポート問題・演習問題を解くことにより練習を積むことを望む．

さて，I を区間とし，$f\in C^{\infty}(I)$, $a\in I$ とする．すると，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して，$f(x)$ を $x=a$ の周りで n 次テイラー展開することができる：

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k+R_n(x),\ \text{ただし } R_n(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_a^x\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}\,(x-t)^{n-1}\,dt\\ \dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\,(x-a)^n\quad(\xi：a\ \text{と}\ x\ \text{の間})\end{cases}$$

もしも I 上で $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ となるならば,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (x \in I)$$
$$\left(= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \right)$$

と書ける．これを $f(x)$ の $x = a$ の周りでの**テイラー（級数）展開**と呼ぶ．特に $a = 0$ のときは**マクローリン（級数）展開**と呼ぶ.

Ex. ① $f(x) = e^x \Longrightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R})$.

② $f(x) = \sin x$

$$\Longrightarrow \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots \ (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}).$$

問 $\cos x$, $\log(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ についても同様にマクローリン展開を考えてみよ．（収束する x の範囲も）

Rem. $f \in C^\infty(I)$ であっても，$a \in I$ の周りでテイラー展開できない関数がある.

Ex. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ や $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$.

テイラーの定理の応用をもう二つ述べる．一つ目は関数の極大値・極小値とその判定条件についてである．まずは，関数の極大・極小の定義を述べる．なお，教科書とは定義を変えているので注意すること[4].

Def. $f(x)$ を $I = (a, b)$ 上の関数，$x_0 \in I$ とする．（a が $-\infty$ のときや b が ∞ のときも許す）

① $f(x)$ は $x = x_0$ において**（狭義の）極大である**
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$「$\exists\delta > 0$ s.t. $0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) < f(x_0)$.」

② $f(x)$ は $x = x_0$ において**広義の極大である**
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$「$\exists\delta > 0$ s.t. $|x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) \leq f(x_0)$.」

（**極小**，**広義の極小**も同様に定義）

まず，$f(x)$ が $x = x_0$ において極大・極小であるための必要条件を述べよう.

Prop. $f(x)$ が $x = x_0$ において広義の極大（極小）であり，かつ $f(x)$ が $x = x_0$ において微分可能であるならば，$f'(x_0) = 0$ である.

Rem. この命題の逆は不成立である.（**Ex.** $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$）

[4] このメモに載っている方が通常の定義です.

次に，$f(x)$ が $x = x_0$ において極大・極小であるための十分条件を述べよう．この定理はテイラーの定理を用いて示される．

Th. $f \in C^2(I)$, $x_0 \in I$ とする．
もし $f'(x_0) = 0$ かつ $f''(x_0) > 0$ ならば，$f(x)$ は $x = x_0$ において（狭義の）極小である．
（$f''(x_0) < 0$）　　（極大）

Th. $f \in C^n(I)$, $x_0 \in I$, $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ とする．

(i) n が偶数のとき　$f^{(n)}(x_0) > 0$ ならば $f(x)$ は $x = x_0$ において極小であり，
$f^{(n)}(x_0) < 0$ ならば $f(x)$ は $x = x_0$ において極大である．

(ii) n が奇数のとき　$f(x)$ は $x = x_0$ において極大でも極小でもない．

もう一つの応用として，凸関数を扱う．皆さんは中学・高校のときに 2 次関数 $y = x^2$ のグラフは**下に凸（上に開いている）**，$y = -x^2$ のグラフは**上に凸（下に開いている）**と学んだであろう．しかし，その意味（定義）について学んだ方は少ないだろうと思われる．$y = x^2$ のグラフが下に凸であるとは，グラフ上の任意の 2 点に対して，2 点を繋ぐ $y = x^2$ のグラフより 2 点を結ぶ線分の上側にあることを意味している．これを念頭に置いて，凸関数・凹関数の定義を述べる．

Def. I を区間，$f : I \to \mathbb{R}$ を関数とする．

- $f(x)$ は I 上の**凸関数**（**凹関数**）
$\overset{\text{def}}{\iff}$「$\forall x_1, \forall x_2 \in I$, $\forall t \in [0,1]$, $f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$.」
$(\geq)$
（$y = f(x)$ のグラフは**下に凸**（**上に凸**））

- $f(x)$ は I 上の**狭義の凸関数**（**狭義の凹関数**）
$\overset{\text{def}}{\iff}$「$\forall x_1, \forall x_2 \in I$ $(x_1 \neq x_2)$, $\forall t \in (0,1)$, $f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) < (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$.」
$(>)$

では，$f(x)$ が凸関数・凹関数であるための十分条件を述べよう．この定理もテイラーの定理を用いて示される．

Prop. I を区間とし，$f(x)$ は I 上で 2 回微分可能であるとする．

① $f''(x) \geq 0$ $(\forall x \in I)$ ならば，$f(x)$ は I 上の凸関数である．
$(\leq)$　　（凹関数）

② $f''(x) > 0$ $(\forall x \in I)$ ならば，$f(x)$ は I 上の狭義の凸関数である．
$(<)$　　（狭義の凹関数）

問 この命題の ①，② のそれぞれについて，逆の真偽を答え，その理由を述べよ．

８．広義積分

まずは，次の計算をご覧いただきたい．

$$\textcircled{1}\ \int_0^{\infty} e^{-x} = \left[-e^{-x}\right]_0^{\infty} = -e^{-\infty} - (-1) = 1.$$

$$\textcircled{2}\ \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_0^1 = -\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{0}\right) = \infty.$$

どちらも気持ちは分からないでもないが，このままでは良くないと思われたことであろう．そもそも，リーマン積分は閉区間 $[a,b]$ 上の有界な関数に対して定義されたものであり，① は被積分関数 e^{-x} の定義域（積分区間）が無限区間 $[0,\infty)$ であり，② は被積分関数 $\dfrac{1}{x^2}$ の定義域が半開区間 $(0,1]$ であり，さらに $(0,1]$ 上で有界でない．

本章では，

(A) 区間が無限区間 $[a,\infty)$, $(-\infty,b]$, $(-\infty,\infty)$ のとき

(B) 関数が非有界（区間の端に近づくと発散）となるとき
（即ち，区間が $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b) のとき）

の積分について考える． このような積分を**広義積分**と呼ぶ．

(A) 無限区間における積分

Def. $f(x)$ は $[a,\infty)$ 上で連続であるとする．
（実際には，任意の $R>a$ に対して $\displaystyle\int_a^R f(x)\,dx$ が存在すればよい）

極限 $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)\,dx$ が存在するとき，広義積分 $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ は**収束する**といい，この極限値を $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ で表す．極限が存在しないとき，広義積分 $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ は**発散する**という．

Ex. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^R = \lim_{R\to\infty}\left(1-e^{-R}\right) = 1.$

（正しくは，$R>0$ に対して $\displaystyle\int_0^R e^{-x}\,dx = \cdots = 1-e^{-R} \to 1\ (R\to\infty)$ だから，$\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = 1$.）

同様に，$\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{R'\to-\infty}\int_{R'}^b f(x)\,dx$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{R\to\infty\\ R'\to-\infty}}\int_{R'}^R f(x)\,dx$ と定義する．

(B) 非有界関数の積分

Def. $f(x)$ は $[a,b)$ 上で連続であるとする[5]．極限 $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ が存在するとき，広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ が**収束する**という．（発散も同様）

[5]以後，簡単のため被積分関数は連続であると仮定していますが，**(A)** と同様に仮定を緩めることができます．

同様に，$f(x)$ が $(a,b]$ 上で連続であるとき，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon'\to+0}\int_{a+\varepsilon'}^b f(x)\,dx$,

$f(x)$ が (a,b) 上で連続であるとき，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \varepsilon'\to+0}}\int_{a+\varepsilon'}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$

と定義する．

Def. $f(x)$ は (a,b) 内の点 $c_1,\dots,c_n$ $(c_1<\cdots<c_n)$ を除いて連続であるとする．

もし，広義積分 $\displaystyle\int_a^{c_1} f(x)\,dx, \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx, \dots, \int_{c_n}^b f(x)\,dx$ が全て存在するとき，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は収束するといい，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{c_n}^b f(x)\,dx$$

と定義する．

Ex. $\alpha>0$ とする．

① $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & (\alpha<1) \\ \infty & (\alpha\geq 1) \end{cases}$.　　② $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & (\alpha>1) \\ \infty & (\alpha\leq 1) \end{cases}$.

問 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$ は収束するか？

Prop. $f,g\in C([a,\infty))$ であり，$\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx, \int_a^\infty g(x)\,dx$ が収束すると仮定する．

① $\displaystyle\int_a^\infty \big(f(x)\pm g(x)\big)\,dx$ も収束し，$\displaystyle\int_a^\infty \big(f(x)\pm g(x)\big)\,dx = \int_a^\infty f(x)\,dx \pm \int_a^\infty g(x)\,dx$.

② $c\in\mathbb{R}$ に対し，$\displaystyle\int_a^\infty \big(c\,f(x)\big)\,dx$ も収束し，$\displaystyle\int_a^\infty \big(c\,f(x)\big)\,dx = c\int_a^\infty f(x)\,dx$.

（← 他の広義積分についても同様）

次に，広義積分の収束判定法を述べる．まずは，広義積分における「コーシーの判定法」に対応する命題を述べる．

Prop. $f\in C([a,\infty))$ とする．このとき，広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ が収束することと

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists R>0 \text{ s.t. } R<x_1<x_2 \Longrightarrow \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right|<\varepsilon$$

が成り立つことは同値である．

Prop. $f\in C([a,b))$ とする．このとき，広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ が収束することと

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0 \text{ s.t. } b-\delta<x_1<x_2<b \Longrightarrow \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right|<\varepsilon$$

が成り立つことは同値である．（他の広義積分も同様 ← 以下略）

解析学 I で学んだ級数のときと同様，次の比較判定法はしっかりと理解し，使いこなせるようになって欲しい．

Th.（比較判定法）

$f, g \in C([a,\infty))$ とする．

① $|f(x)| \leq g(x)$ $\big(\forall x \in [a,\infty)\big)$ かつ $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ が収束するならば，$\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ も収束する．

② $0 \leq g(x) \leq f(x)$ $\big(\forall x \in [a,\infty)\big)$ かつ $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ が発散するならば，$\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ も発散する．

問 ① $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ は収束するか？　　② $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$ は収束するか？

Def. $f \in C([a,\infty)$ とする．

広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ が**絶対収束**する $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\displaystyle\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ が収束する．

Cor. $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ が絶対収束するならば，$\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ は収束する．

Rem. 級数のときと同様に，この系の逆は偽である．

Ex. (i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ は収束する．　　(ii) $\displaystyle\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ は発散する．

Rem. 実際には $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ である．（難）

本章の最後に，重要な広義積分の例である**ガンマ関数**と**ベータ関数**について学ぼう．定義はもちろんのこと，ガンマ関数・ベータ関数を定義する広義積分が収束することの証明もしっかりと理解して欲しい．

Th. / Def.

$p > 0$ のとき，広義積分 $\Gamma(p) = \displaystyle\int_0^\infty e^x x^{p-1}\,dx$ は収束する．

$p \in (0,\infty)$ の関数 $\Gamma(p)$ を**ガンマ関数**と呼ぶ．

Prop. ① $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ $(\forall p > 0)$.　　② $\Gamma(n) = (n-1)!$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

Th. / Def.

$p > 0, q > 0$ のとき，広義積分 $B(p,q) = \displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ は収束する．**（ベータ関数）**

問 ① $B(p,q) = B(q,p)$.　　② $p, q \in \mathbb{N}$ のとき $B(p,q)$ を求めよ．

ガンマ関数とベータ関数には $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ $(\forall p > 0,\ \forall q > 0)$ という重要な関係式があるのだが，その証明は 2 年生の解析学 IV で学ぶこととし，本講義では触れない．

９．曲線の長さ

定積分の応用として，曲線の長さについて学ぼう．高校の数学 III で曲線の長さを求める公式は学習していると思うが，そもそも曲線の「長さ」とは何か？という質問に答えていなかった[6]．まずは，平面内の図形 $C \subset \mathbb{R}^2$ が連続曲線（C^m 級曲線）であることの定義を述べよう．

Def. $C \subset \mathbb{R}^2$ が**連続曲線（C^m 級曲線）**

$\overset{\text{def}}{\iff}$ ある区間 I 上で定義された t の連続関数（C^m 級関数）$\varphi(t), \psi(t)$ を用いて

$$C = \big\{(x, y) \,\big|\, x = \varphi(t),\ y = \psi(t)\ (t \in I)\big\}$$

と表される．（以後，$C : x = \varphi(t),\ y = \psi(t)\ (t \in I)$ と書く）

Ex. $y = f(x)\ (x \in I)$ のグラフは

$$C : x = t,\ y = f(t)\ (t \in I)$$

と書ける．（故に，$f(x)$ が I 上で連続（C^m 級）であれば，C は連続曲線（C^m 級曲線）である）

以下，$I = [a, b]$ とする．（C は $\mathrm{P}\big(\varphi(a), \psi(a)\big)$ から $\mathrm{Q}\big(\varphi(b), \psi(b)\big)$ への連続曲線）

次に，連続曲線 $C : x = \varphi(t),\ y = \psi(t)\ (t \in I)$ の長さの定義を述べよう．リーマン積分のときと同様，$I = [a, b]$ の分割

$$\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

を取る．分割 Δ に対し，$\mathrm{P}_k = \big(\varphi(t_k), \psi(t_k)\big)$ とおき，

$$L_\Delta = \sum_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} \qquad (\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} : \text{線分 } \mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k \text{ の長さ})$$

と定める．

Def. $\ell(C) = \sup\big\{L_\Delta \,\big|\, \Delta \text{ は } I \text{ の分割}\big\}$ が存在するとき，C は**長さをもつ**といい，$\ell(C)$ を **C の長さ**という．

曲線の長さは定義されたが，連続曲線は必ずしも長さをもつとは限らない．

Ex. $y = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \big(x \in (0, 1]\big) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ のグラフは長さをもたない．

問 なぜか？

[6] そもそも，小学 5 年生の算数で「円周の長さ」を学習していますし，「日本の都道府県の中で海岸線の長さが最も長いのは？」というクイズがありますが，まっすぐでない曲線である円周や海岸線の「長さ」とは何かについて教えられてこなかったはずです（円周については，車輪を転がしてちょうど 1 周したときに進んだ長さを測ったり，円周にひもを巻いてまっすぐに伸ばして測ったりしたことと思いますが，それでは曲線の長さの定義をしたことにはなっていません）．

では，連続曲線 $C : x = \varphi(t),\ y = \psi(t)\ (t \in I)$ が長さをもつのはどんなときであるか？まずは簡単な十分条件を一つ挙げよう．

Prop. $\varphi(t), \psi(t)$ が I 上の連続な単調関数であるならば，C は長さをもち，

$$\ell(C) \leq \big|\varphi(b) - \varphi(a)\big| + \big|\psi(b) - \psi(a)\big|$$

が成り立つ．

Ex. 半径 1 の円周の $\dfrac{1}{4}$ である $C : x = t,\ y = \sqrt{1 - t^2}\ (t \in [0, 1])$ は直前の命題により長さをもつ．（従って，半径 1 の円周は長さをもつ）

Prop. ① $\Delta_1 \subset \Delta_2 \Longrightarrow L_{\Delta_1} \leq L_{\Delta_2}$.

② C が長さをもつ $\overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} \lim_{|\Delta| \to 0} L_\Delta$ が存在する．$(= \ell(C))$

この命題を用いて，高校で学習した曲線の長さの公式を定理として示すことができる．

Th. $C : x = \varphi(t),\ y = \psi(t)\ (t \in I)$ が C^1 級曲線であるならば，C は長さをもち，

$$\ell(C) = \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt$$

が成り立つ．

Th. ① $f \in C^1([a, b])$ ならば，$y = f(x)\ (x \in [a, b])$ で表される曲線 C の長さは

$$\ell(C) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

である．

② $g \in C^1([\alpha, \beta])$ ならば，極方程式 $r = g(\theta)\ (\theta \in [\alpha, \beta])$ で表される曲線 C の長さは

$$\ell(C) = \int_\alpha^\beta \sqrt{g(\theta)^2 + g'(\theta)^2}\, d\theta$$

である．

Rem. 連続関数が「長さをもつ」ことや曲線の長さは，曲線のパラメータ付けを変えても不変であることが示せる．(即ち，＿＿＿は曲線（の像）のみできまる概念である）

以上の準備の下，前期の解析学 I の第 15 回の講義 (7/30) で証明せずに保留としていた

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

を厳密に証明することができる．このことにより，$\big(\sin\theta\big)' = \cos\theta,\ \big(\cos\theta\big)' = -\sin\theta$ や，半径 1 の円の面積が π であることなども示せる．