解析学 I　レポート問題 No.1　解答・解説 （2026.6.9 出題）

プリントは `https://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/takimoto/R8Kai1.html` にも置いてあります.

$\boxed{\textbf{問 1}}$ (1) **[解答]**

- **A が上に有界でない：** $\underline{\forall a \in \mathbb{R},\ \exists x \in A \text{ s.t. } x > a.}$
- **A が下に有界でない：** $\underline{\forall a \in \mathbb{R},\ \exists x \in A \text{ s.t. } x < a.}$

注意． 「A にはいくらでも大きな数がある」「A にはいくらでも小さな数がある」を数学的に表現したものです．試験で「上（下）に有界でない」を論理記号を用いて書けと言われたら上のように解答して欲しいわけです．ただ，例えば

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \exists x \in A \text{ s.t. } x \geq a,$$
$$\forall a > 0,\ \exists x \in A \text{ s.t. } x > a$$

なども,「A が上に有界でない」と**同値な**命題となります. (←なぜでしょうか？)

(2) (i), (ii) で示すべきことを論理記号を用いて書くと,

$$\text{(i) } \forall x \in A,\ x \leq -\frac{1}{6}, \qquad \text{(2) } \forall a \in \mathbb{R},\ \exists x \in A \text{ s.t. } x < a$$

となります．(i) は「当たり前すぎて何を書けば良いのかわからない」と感じた方も多いようです（もちろん，当たり前だ（正しい）と感じなければ証明は書けないわけですが）．何を書けば証明したことになるのかをきちんと理解することはとても重要です．一方，(ii) は出来が良くない問題となりました．任意に $a \in \mathbb{R}$ を取ったとき，どのように x を選べば良いかが最大の（そして唯一の）問題です．$x < a$ となって欲しいということは，例えば $x = a - 1 = \dfrac{1}{t^2 - 4}$ となるような t を取ってくればいいんだな，つまり $t = \sqrt{4 + \dfrac{1}{a-1}}$ とでもおけば良いだろうということは想像できそうです．しかし！ こうして決めた t が $-2 < t < 2$ を満たすかどうかは確認しなければいけません．それどころか，$4 + \dfrac{1}{a-1}$ が負の数になることもあり得ますよね…….

「A には下界が存在しない」ことを証明するという方針でも (ii) の問題は解けますが，本質的に書くことは同じです.

[証明] (i) 任意に $x \in A$ を取る．すると，A の定義により，ある $t \in (-2, 2)$ が存在して $x = \dfrac{1}{t^2 - 4}$ が成り立つ．このとき，$-4 \leq t^2 - 4 < 0$ であるから，

$$x = \frac{1}{t^2 - 4} \leq -\frac{1}{4} < -\frac{1}{6}$$

が成立する．故に，$-\dfrac{1}{6}$ は A の上界である. ■

(ii) 任意に $a \in \mathbb{R}$ を取る．

<u>**Case 1.** $a > 0$ のとき</u>

$x = -\dfrac{1}{4}$ とおく．すると，$t = 0 \in (-2, 2)$ に対して $x = \dfrac{1}{t^2 - 4}$ であるから $x \in A$ であり，また $a > 0 > -\dfrac{1}{4} = x$ が成立する．

<u>**Case 2.** $a \leq 0$ のとき</u>

$x = a - 1$ とおく．$a - 1 \leq -1$ であるから，$4 > 4 + \dfrac{1}{a-1} \geq 4 - \dfrac{1}{1} = 3$ であることに注意すると，$t = \sqrt{4 + \dfrac{1}{a-1}}$ とおけば $-2 < \sqrt{3} \leq t < \sqrt{4} = 2$ なので $t \in (-2, 2)$ である．この t に対して $\dfrac{1}{t^2 - 4} = \dfrac{1}{\left(\sqrt{4 + \frac{1}{a-1}}\right)^2 - 4} = a - 1 = x$ が成り立つので，$x \in A$ である．また $x = a - 1 < a$ が成立する．

故に，A は下に有界ではない． ■

<u>**注意．**</u> (2) における x の選び方は一例ですので，他にもいろいろな選び方があります．例えば，

$$x = -(|a| + 1)$$

とおくと，$t = \sqrt{4 - \dfrac{1}{|a| + 1}}$ に対して $x = \dfrac{1}{t^2 - 4}$ であり，$2 > t = \sqrt{4 - \dfrac{1}{|a| + 1}} \geq \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3} > -2$ なので $x \in A$ であり，$x = -(|a| + 1) < -|a| \leq a$ が言えるので，a の値に関して場合分けをすることなく証明が書けます．

<u>**注意．**</u> 実際には $A = \left(-\infty, -\dfrac{1}{4}\right]$ となっているのですが，これはきちんと証明しなければ用いることはできません．

$\boxed{\textbf{問 2}}$ (1) の A は下に有界だが上に有界でない，(2) の B は上にも下にも有界でない，(3) の C は上に有界だが下に有界でない，ということは想像できるでしょうから，後はこれを論理的に示すことです．(2), (3) では，**ガウス記号**の性質である「任意の $y \in \mathbb{R}$ に対して $y-1 < [y] \leq y$ であることを用いています．

[解答] (1) $\boxed{\bullet\ A \text{ が上に有界でないこと}}$

任意に $a \in \mathbb{R}$ を取る．このとき，$x = \max\{2027, a+1\}$ とおくと $x \geq 2027 > 2026$ であるから $x \in A$ である．また，$x \geq a+1 > a$ が成り立つので，A は上に有界ではない．

$\boxed{\bullet\ A \text{ が下に有界であること}}$

$a = 2026$ とおく．任意に $x \in A$ を取ったとき，A の定義より明らかに $x > 2026 = a$ であるから，A は下に有界である．

従って，A は <u>(iii) 下に有界であるが，上に有界でない</u>．

<u>**注意．**</u> 上に有界でないことの証明の中で，x は

$$x = \begin{cases} 2027 & (a < 2026 \text{ のとき}) \\ a+1 & (a \geq 2026 \text{ のとき}) \end{cases}$$

のように場合分けして考えても良いです（(3) では場合分けの方法で答案を書いてみます）．これを見ても分かるように，x の選び方は一通りではないのです（議論さえ正しければ何でも正解です）[1]．

(2) まず，任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ に注意する．

$\boxed{\bullet\ B \text{ が上に有界でないこと}}$

任意に $a \in \mathbb{R}$ を取る．このとき，$n = [2(a+1)]+1$ とおき，$x = \dfrac{n}{2} - (-1)^n$ とおくと，$n \in \mathbb{Z}$ であるから $x \in B$ である．また，$x = \dfrac{n}{2} - (-1)^n \geq \dfrac{[2(a+1)]+1}{2} - 1 > \dfrac{2(a+1)}{2} - 1 = a$ が成り立つので，B は上に有界ではない．

$\boxed{\bullet\ B \text{ が下に有界でないこと}}$

任意に $a \in B$ を取ると，このとき，$n = [2a]-3$ とおき，$x = \dfrac{n}{2} - (-1)^n$ とおくと，$n \in \mathbb{Z}$ であるから $x \in B$ である．また，$x = \dfrac{n}{2} - (-1)^n \leq \dfrac{[2a]-3}{2} + 1 \leq \dfrac{2a-3}{2} + 1 = a - \dfrac{1}{2} < a$ が成り立つので，B は下に有界ではない．

従って，B は <u>(iv) 上に有界でなく，かつ下に有界でない</u>．

(3) $\boxed{\bullet\ C \text{ が上に有界であること}}$

$a = 4$ とおく．任意の $x \in C$ を取ると，ある $b \in \mathbb{Q}$ が存在して $x = 4 - b^2$ と書ける．このとき，

$$x = 4 - b^2 \leq 4 = a$$

が成立するので，C は上に有界である．

[1] 例えば，$x = |a| + 2027$ としても $x \in A$ かつ $x > a$ であることが言えます．

$\boxed{\bullet\ C \text{ が下に有界でないこと}}$

任意に $a \in \mathbb{R}$ を取る．

Case 1. $a > 4$ のとき

$x = 4$ とおくと，$b = 0 \in \mathbb{Q}$ に対して $x = 4 - b^2$ であるから $x \in C$ であり，$x = 4 < a$ が成立する．

Case 2. $a \leq 4$ のとき

$b = \left[\sqrt{4-a}\right] + 1$ とおくと，$b \in \mathbb{N}$ である（従って，$b \in \mathbb{Q}$ である）．この b に対して $x = 4 - b^2$ とおくと，$x \in C$ である．また，$b > \left(\sqrt{4-a} - 1\right) + 1 = \sqrt{4-a} \geq 0$ であるから

$$x = 4 - b^2 > 4 - \left(\sqrt{4-a}\right)^2 = 4 - (4-a) = a$$

が成立する．

故に C は下に有界ではない．

以上の結果，C は (ii) 上に有界であるが，下に有界でない．

注意． C が下に有界でないことの証明で，任意に $a \in \mathbb{R}$ を取ったときに $x < a$ を満たす $x \in C$ をどう選ぶか？が最大な問題であるわけです．レポートでは学生さんによっていろいろな選び方がありました．上の解答では a の値に関して場合分けしましたが，例えば $b = \left[\sqrt{|a|+4}\right] + 1$ として $x = 4 - b^2$ とおくと，場合分けをせずに証明できます（各自で証明をしてみましょう）．

問３ $m = \max A$ とは「$\forall x \in A, x \leq m$」かつ「$m \in A$」ということでした．このことを仮定して，$\sup A = m$ であることを示せ，という問題です．まずは**何を示せばよいか**を明確にすることが重要です．

[証明] $m = \max A$ とおく．このとき，次の二つを示せばよい．

① $\forall x \in A,\ x \leq m.$
② $\forall a < m,\ \exists x \in A$ s.t. $x > a.$

① は $m = \max A$ であることから従う．② を示すため，任意に $a < m$ を取る．このとき，$x = m$ とおけば，$m = \max A$ であることから $x = m \in A$ であり，また $x = m > a$ が成り立つ．

従って，$\sup A = m = \max A$ であることが示された． ■

$\boxed{\textbf{問4}}$ 「$\max A = \sup A = \dfrac{1}{5}$」「$\min A$ は存在しない」「$\inf A = 0$」であろうということは多くの方が予想できていたようです．$\max A$ と $\min A$ については概ね正しい議論ができていましたが，$\inf A$ は難関だったようです．しっかり復習して，もう一度ご自身の手で解答を書いてみましょう．

[解答]

$\boxed{\bullet \max A}$

(i) $\forall x \in A,\ x \leq \dfrac{1}{5}$, (ii) $\dfrac{1}{5} \in A$ を示す．

任意に $x \in A$ を取ると，ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して $x = \dfrac{1}{3n+2}$ が成り立つ．従って，

$$x = \frac{1}{3n+2} \leq \frac{1}{3 \times 1 + 2} = \frac{1}{5} \qquad (\because\ n \geq 1)$$

が成立する．故に (i) は示された．

また，$\dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{3 \times 1 + 2}$ であるから (ii) も成立する．

従って，$\underline{\max A = \dfrac{1}{5}}$ である．

$\boxed{\bullet \sup A}$

$\max A$ が存在するので，$\boxed{\textbf{問3}}$ の結果から $\sup A = \max A = \underline{\dfrac{1}{5}}$.

$\boxed{\bullet \inf A}$

(i) $\forall x \in A,\ x \geq 0$, (ii) $\forall a > 0,\ \exists x \in A$ s.t. $x < a$ を示す．

任意に $x \in A$ を取ると，ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して $x = \dfrac{1}{3n+2}$ が成り立つ．$3n+2 > 2 > 0$ であるから，$x = \dfrac{1}{3n+2} > 0$ が成立する．故に (i) は示された．

次に，任意に $a > 0$ を取る．このとき，$n_0 = \max\left\{1, \left[\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{a} - 2\right)\right] + 1\right\}$ とおき，$x = \dfrac{1}{3n_0+2}$ と定めると，$n_0 \in \mathbb{N}$ であるから $x \in A$ である．このとき

$$x = \frac{1}{3n_0+2} \leq \frac{1}{3\left(\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}-2\right)\right]+1\right)+2} < \frac{1}{3\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}-2\right)\right)+2} = a$$

が成立する[2]ので，(ii) は示された．

従って，$\underline{\inf A = 0}$ である．

[2]ガウス記号の性質のうち,「任意の $y \in \mathbb{R}$ に対して $[y] > y - 1$ が成立する」を用いました．

注意． 「$n_0 = \max\left\{1, \left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}-2\right)\right]+1\right\}$」の部分は「$n_0$ として $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}-2\right)$ より大きい自然数を一つ選ぶ」としても O.K. です．しかし，なぜこんな摩訶不思議？な数がいきなり登場したのでしょうか．それは，頭の中で次のようなことを考えていたからです．

> （頭の中）任意に $a > 0$ を取ったとき，$x < a$ となる $x \in A$ を見つけたいわけだ．
>
> $x \in A$ は $x = \frac{1}{3n+2}$ $(n \in \mathbb{N})$ と表せるのだから
>
> $$\frac{1}{3n+2} < a$$
>
> を満たす $n \in \mathbb{N}$ を見つければいいということか．それじゃ，これを実際に解いてみよう．
>
> $$3n+2 > \frac{1}{a}. \qquad \therefore\ n > \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}-2\right)$$
>
> となるから，n として $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}-2\right)$ より大きな自然数を選べば良いわけだな．それじゃ，ガウス記号を使って $n = \left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}-2\right)\right]+1$ と取ればいいわけじゃん．
>
> ……と思ったのだが，このままだと $a > \frac{1}{2}$ のときに $n = 0$ になっちゃって n は自然数にならないから $x = \frac{1}{3n+2}$ が A の元ではないことになっちゃうなぁ．そしたら $a > \frac{1}{2}$ と $0 < a \leq \frac{1}{2}$ で場合分けしなきゃいけないのかぁ．あっ，でも，n は $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}-2\right)$ より大きな自然数なら何でも良いんだから，1 と比べて大きい方にしてしまえば絶対に自然数になるぞ．

しかし，上の答案だと少し面倒くさいですよね．それは $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}-2\right)$ が負の数になる可能性があったからで，今回の場合は次のようにするとうまく回避できます．

[別解] ((ii) の部分のみ) 任意に $a > 0$ を取る．このとき，$n_0 = \left[\frac{1}{3a}\right]+1$ とおき，$x = \frac{1}{3n_0+2}$ と定めると，$n_0 \in \mathbb{N}$ であるから $x \in A$ である．このとき

$$x = \frac{1}{3n_0+2} = \frac{1}{3\left(\left[\frac{1}{3a}\right]+1\right)+2} < \frac{1}{3 \times \frac{1}{3a}+2} = \frac{1}{\frac{1}{a}+2} < \frac{1}{\frac{1}{a}} = a$$

が成立するので，(ii) は示された．

このように，自然数 n_0 の選び方（つまり x の選び方）は 1 通りではありません（基本は，うまく行くように「逆算」することですが，必ずしもギリギリを見つける必要はないのです）．何はともあれ,「任意の $a > 0$ を取ったとき，$x < a$ となる $x \in A$ を**何か一つ探す**」という意識を持って考えることが重要です．

$\boxed{\bullet\ \min A}$

いま，$\min A$ が存在したと仮定する．$\min A = m$ とおくと，$\inf A = \min A$ であるから，前の結果より $m = 0$ となる．ところが，任意の $x \in A$ に対して $x > 0$ であったから（$\inf A = 0$ の証明の (i) を見よ），$m = 0 \notin A$ である．これは $\min A = 0$ であることに矛盾する．

従って，$\underline{\min A\ \text{は存在しない}}$.

[別解]（$\min A$ が存在しないことを直接示す）

いま，$\min A$ が存在したと仮定する（$\min A = m$ とおく）．

すると $m \in A$ であるから，ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して $m = \dfrac{1}{3n+2}$ と書ける．このとき，$x = \dfrac{1}{3(n+1)+2} = \dfrac{1}{3n+5}$ とおくと，$n+1 \in \mathbb{N}$ であるから $x \in A$ であり，

$$x = \frac{1}{3n+5} < \frac{1}{3n+2} = m$$

である．これは m が A の下界であることに矛盾する．

従って，$\underline{\min A\ \text{は存在しない}}$.

注意．「A に最小値が存在しないこと」は次の命題と同値になります（各自証明してみてください）．

$$\forall x \in A,\ \exists y \in A \text{ s.t. } y < x.$$

これを用いても証明することができます（本質的には上の証明と同じになりますけど）．