数理解析学 A・数理解析基礎講義 A レポート問題 No.1 解説（2025.4.8 出題）

初回の講義中に申し上げたとおり，このレポートを提出された方は，出来具合にかかわらず全員同じ評価を行いました．以下，皆さんの答案を見て感じたことについて書きたいと思います．

1 いろいろな答案がありましたが，教科書に載っている形としては

> $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とし，$\bigl(f_n\bigr)$ を X 上の $\mathcal{B}$-可測関数列，f を X 上の $\mathcal{B}$-可測関数とする．いま，次の 2 条件が成り立つと仮定する：
>
> ① $\bigl(f_n(x)\bigr)$ は X 上ほとんどいたるところ $f(x)$ に収束する．
> ② ある μ-可積分関数 g が存在して，
> 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $|f_n(x)| \leq g(x)\ \ \mu\text{-a.e.}x \in X$ が成立する．
>
> このとき，f は μ-可積分関数であり
>
> $$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$
>
> が成立する．

です．今後の講義で何度も使われる定理ですので，しっかり復習しておいてください．

「μ-a.e.$x \in X$」を「$\forall x \in X$」と書いた人が多かったです．これでも数学的には正しい命題ですが（条件が厳しくなっただけだから）,「a.e.」で記述した方が汎用性が高いです．なお,「f が μ-可積分であること」は仮定ではなく結論です．

2 内部進学の方はおそらく解析学 IV で学習したことでしょう．解答は当時の講義ノートや教科書をご覧いただくとしまして，どのような方法で議論を進めるにせよ大事なのは $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \, dxdy$ の取り扱いでしょう．

Riemann 広義重積分として可積分である（近似列の取り方に依らずに極限値が定まる）ことを示す際には，被積分関数が**非負値**であることに言及する必要があります．一方，Lebesgue 積分としてみた場合にも，$A_n := \{x^2+y^2 \leq n^2\}$，$\chi_{A_n}(x,y) = \begin{cases} 1 & ((x,y) \in A_n) \\ 0 & ((x,y) \notin A_n) \end{cases}$ とおいたとき

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \, dxdy &= \lim_{n\to\infty} \iint_{\mathbb{R}^2} \chi_{A_n}(x,y) e^{-(x^2+y^2)} \, dxdy \\ &= \lim_{n\to\infty} \iint_{A_n} e^{-(x^2+y^2)} \, dxdy \end{aligned}$$

を示す際には，単調収束定理を使うわけですからやはり被積分関数が**非負値**であることが重要です．この点に言及した答案は多くはなかったです．

$\boxed{3}$ 複素解析学で学んだ内容の復習ですが，実は $\mathbb{R}$ 上の関数 $\dfrac{1}{x^2+1}$ の Fourier 変換を求めるという問題です.

(1) 極は i と $-i$ で共に 1 位の極，留数はそれぞれ $\dfrac{e^{\xi}}{2i}, -\dfrac{e^{-\xi}}{2i}$ です.

(2) 答は $\pi e^{-|\xi|}$ です. $\dfrac{e^{-ix\xi}}{x^2+1}$ が $\mathbb{R}$ 上で可積分であることに言及した答案は非常に少なかったですが，それは大したことではありません. 積分路を $-R$ から R までの線分を直径とする半円として留数定理（Cauchy の積分定理）を用い，次に円弧上の線積分が $R \to \infty$ のときに 0 に近づくことを利用して求めるわけですが，円弧を $\xi \geq 0$ のときは下半平面内に，$\xi < 0$ のときは上半平面内に取らなければ円弧上の線積分は 0 に収束しません.

結局，$\dfrac{1}{x^2+1}$ の Fourier 変換は $\pi e^{-|\xi|}$ ということになります. 今後の講義で触れますが，Fourier 変換について学習を進めると，答が $\pi e^{-\xi}$ や πe^{ξ} になるのはおかしいと分かるようになるでしょう.