解析学 III　レポート問題 No.4

（2025.6.25 出題）

プリントは `https://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/takimoto/R7Kai3.html` にも置いてあります．

- 裏面にある問題のうち，解けたものについてレポートにして提出してください．
- 期限・提出場所は以下の通りとします．

期限：**7 月 1 日（火） 13 時 00 分（〆切厳守）**

提出場所：**数学図書室 (A209) レポート提出ボックス， または Moodle 上で PDF ファイルを提出**

- 紙媒体で提出する場合は，必ず A4 の用紙を使用し，2 枚以上になる場合は左上をホッチキス等でしっかり綴じてください．
- Moodle で提出する場合は，必ず PDF ファイルで提出してください．また，ファイル名を `Kai3report4_B******.pdf`（`B******` は学生番号）としてください．
提出場所は Moodle の「講義」セクションの「第 6 回 (6/25)」にあります．
- 表紙は付けなくて結構です．学生番号・氏名をお忘れなく．
- 解けなかった問題についても,「このように考えてここまでわかったがその先がわからない」といったことや,「このように考えたが解くことができなかった」といったことを書いてくれれば，内容に応じて評価します．
- ただし，レポートの体をなさないものは不提出扱いとします．また，他人のレポートをほぼ丸写ししたと思われるものは（写したレポート，写されたレポート双方を）不提出扱いとし，**さらに大幅な減点とします**．
- レポートは添削した後返却します．

$\boxed{\textbf{問１}}$ **（コーシー・アダマールの定理の一部）** 指示に従い，各自**指定された問題**を解答せよ．

- **学生番号の一の位が 0,1,2,3,4 の学生**

$\displaystyle \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ ならば，べき級数 $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径は ∞ であることを示せ．

- **学生番号の一の位が 5,6,7,8,9 の学生**

$\displaystyle \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ ならば，べき級数 $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径は 0 であることを示せ．

$\boxed{\textbf{問２}}$ べき級数の項別微分を利用して，$\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$ $(|x|<1)$ を示せ．

$\boxed{\textbf{問３}}$ べき級数 $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)} x^{n+2}$ を考える．

(1) このべき級数は，$|x|<1$ ならば収束し，$|x|>1$ ならば発散することを示せ．

(2) $x \in (-1,1)$ に対して $\displaystyle f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)} x^{n+2}$ とおく．項別微分により $f''(x)$ を求めよ．さらに，それを用いて $f(x)$ を求めよ．

(3) (2) を用いて，級数 $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots$ の和を求めよ．

（ヒント：アーベルの定理）

$\boxed{\textbf{問４}}$ $\mathbb{R}^n$ 内の点列 $\left\{\boldsymbol{x}^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ は $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ に収束すると仮定する．このとき，$\left\{\boldsymbol{x}^{(k)}\right\}$ の任意の部分点列 $\left\{\boldsymbol{x}^{(k_i)}\right\}_{i=1}^{\infty}$ も $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ に収束することを示せ．