解析学 III　レポート問題 No.3　　（2025.6.18 出題）

プリントは `https://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/takimoto/R7Kai3.html` にも置いてあります.

- 裏面にある問題のうち，解けたものについてレポートにして提出してください.
- 期限・提出場所は以下の通りとします.

期限：**6 月 24 日（火） 13 時 00 分（〆切厳守）**

提出場所：**数学図書室 (A209) レポート提出ボックス，**
または Moodle 上で PDF ファイルを提出

- 紙媒体で提出する場合は，必ず A4 の用紙を使用し，2 枚以上になる場合は左上をホッチキス等でしっかり綴じてください.
- Moodle で提出する場合は，必ず PDF ファイルで提出してください．また，ファイル名を `Kai3report3_B******.pdf`（`B******` は学生番号）としてください.
提出場所は Moodle の「講義」セクションの「第 4 回 (6/18)」にあります.
- 表紙は付けなくて結構です．学生番号・氏名をお忘れなく.
- 解けなかった問題についても,「このように考えてここまでわかったがその先がわからない」といったことや,「このように考えたが解くことができなかった」といったことを書いてくれれば，内容に応じて評価します.
- ただし，レポートの体をなさないものは不提出扱いとします．また，他人のレポートをほぼ丸写ししたと思われるものは（写したレポート，写されたレポート双方を）不提出扱いとし，**さらに大幅な減点とします**.
- レポートは添削した後返却します.

問１ (1) 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n-2} + \cdots$ は区間 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上で一様収束することを示せ.

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}} = \frac{1}{1\cdot 2^1} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}} + \cdots$ の和を求めよ．（ヒント：(1) の関数項級数を x について 0 から $\frac{1}{2}$ まで項別積分しよう）

問２ (1) 関数項級数 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ は $\mathbb{R}$ 上で連続であることを証明せよ.

(2) **項別微分の定理を用いて，**(1) の $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で C^1 級であり，$f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2x}{(x^2+n^2)^2}$ であることを示せ.

（注意：論理的には (2) を解いて $f(x)$ が $\mathbb{R}$ 上で C^1 級であることを示せば，$f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で連続なので (1) を解答する必要はないわけであるが，ここでは (1) $\to$ (2) の順に解くこと.）

問３ 次のべき級数の収束半径を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^{2n}.$

問４ $\{a_n\}$ を有界な実数列，$\alpha \in \mathbb{R}$ とする.

(1) $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$ を示せ.

(2) 次の命題 (a), (b) について，(b) $\Longrightarrow$ (a) を示せ[1].

(a) $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} a_n = \alpha.$

(b) 次の二つが成立する.

(i) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geq N \Longrightarrow a_n < \alpha + \varepsilon.$

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$a_n > \alpha - \varepsilon$ を満たす n は無限個存在する.

問５ **（希望者のみ[2]）** $x \in \mathbb{R}$ に対して，x に一番近い整数と x との差の絶対値を $\varphi(x)$ で表す. 例えば $\varphi(-1.7) = |(-1.7) - (-2)| = 0.3$, $\varphi(2) = |2-2| = 0$, $\varphi(\pi) = \pi - 3$ である.

(1) $\varphi(x)$ のグラフの概形を描け.

(2) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(10^n x)}{10^n}$ とおく．$f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で連続であることを示せ.

(3) (2) で定義された $f(x)$ は，**すべての点 $x \in \mathbb{R}$ で微分可能でない**ことを示せ.

---

[1] (a) $\Longrightarrow$ (b) は 6/20 の講義で示します.

[2] とはいえ，確かに (3) は難しい問題ではあるものの，(1),(2) は基本〜標準レベル（従って，中間試験に出題できるレベル）の問題ですので，皆さん考えてみましょう.