解析学 III　レポート問題 No.2　（2025.6.11 出題）

プリントは https://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/takimoto/R7Kai3.html にも置いてあります.

- 裏面にある問題のうち，解けたものについてレポートにして提出してください.
- 期限・提出場所は以下の通りとします.

期限：**6 月 17 日（火） 13 時 00 分（〆切厳守）**

提出場所：**数学図書室 (A209) レポート提出ボックス，
または Moodle 上で PDF ファイルを提出**

- 紙媒体で提出する場合は，必ず A4 の用紙を使用し，2 枚以上になる場合は左上をホッチキス等でしっかり綴じてください.
- Moodle で提出する場合は，必ず PDF ファイルで提出してください．また，ファイル名を Kai3report2_B******.pdf（B****** は学生番号）としてください.
提出場所は Moodle の「講義」セクションの「第 2 回 (6/11)」にあります.
- 表紙は付けなくて結構です．学生番号・氏名をお忘れなく.
- 解けなかった問題についても,「このように考えてここまでわかったがその先がわからない」といったことや,「このように考えたが解くことができなかった」といったことを書いてくれれば，内容に応じて評価します.
- ただし，レポートの体をなさないものは不提出扱いとします．また，他人のレポートをほぼ丸写ししたと思われるものは（写したレポート，写されたレポート双方を）不提出扱いとし，**さらに大幅な減点とします**.
- レポートは添削した後返却します.

問１ $f_n(x)=x^n$, $f(x)=0$ とおくとき，関数列 $\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に $[0,1)$ 上で**広義一様収束する**ことを示せ[1].

問２ 次の各問に答えよ．

(1) $f_n(x)=\cos^{2n}x$ とおく．関数列 $\{f_n(x)\}$ は<u>**区間 $[0,\pi]$ 上で一様収束しない**</u>が，<u>**区間 $(0,\pi)$ 上で広義一様収束する**</u>ことを示せ．

（ヒント：まずは極限関数 $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ を求めますが，x の値で場合分けが必要です）

(2) $f_n(x)=\dfrac{x^n}{(1+x^2)^n}$ とおく．関数列 $\{f_n(x)\}$ は $\mathbb{R}$ 上で一様収束するか否かを判定せよ．

（ヒント：極限関数 $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ を求める際には，x の値で場合分けする必要があることに注意．$|f_n(x)-f(x)|$ の $[0,1]$ 上における上限（実は最大値）を計算してみよう.）

問３ 次の各問に答えよ．

(1) $[a,b]$ 上の連続関数列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に $[a,b]$ 上で一様収束すると仮定する．いま，$g_n(x)=\displaystyle\int_a^x f_n(t)\,dt$, $g(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ $(x\in[a,b])$ とおく．このとき，関数列 $\{g_n(x)\}$ は $g(x)$ に $[a,b]$ 上で一様収束することを証明せよ．

(2) $[0,\infty)$ 上の連続関数列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に $[0,\infty)$ 上で一様収束すると仮定する．いま，$g_n(x)=\displaystyle\int_0^x f_n(t)\,dt$, $g(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ $(x\in[0,\infty))$ とおく．このとき，関数列 $\{g_n(x)\}$ は $g(x)$ に $[0,\infty)$ 上で一様収束すると言えるか？ 真と思えば証明し，偽と思えば反例を（理由とともに）与えよ．

問４ $A\subset\mathbb{R}$ を空でない集合とする．関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ が A 上で一様収束するならば，関数列 $\{f_n(x)\}$ は $f(x)=0$ に A 上で一様収束することを示せ．

---

[1] この問題で示すべきことは，$[0,1)$ に含まれる任意の閉区間上で $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に一様収束するということです．$[0,1)$ に含まれる閉区間は $[a,b]$（ただし $0\le a<b<1$）の形で表されますから，結局 $\boxed{\text{任意の } 0\le a<b<1 \text{ に対して，} \{f_n(x)\} \text{ が } f(x) \text{ に } [a,b] \text{ 上で一様収束すること}}$ を示せば良いわけです．