

プリントは <https://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/takimoto/R7Kai3.html> にも置いてあります.

- 裏面にある問題のうち、解けたものについてレポートにして提出してください.
- 期限・提出場所は以下の通りとします.

期限：6 月 10 日 (火) 13 時 00 分 (×切厳守)

提出場所：数学図書室 (A209) レポート提出ボックス、
または Moodle 上で PDF ファイルを提出

- 紙媒体で提出する場合は、必ず A4 の用紙を使用し、2 枚以上になる場合は左上をホッチキス等でしっかり綴じてください.
- Moodle で提出する場合は、必ず PDF ファイルで提出してください. また、ファイル名を Kai3report1_B*****.pdf (B***** は学生番号) としてください.
提出場所は Moodle の「講義」セクションの「第 1 回 (6/6)」にあります.
- 表紙は付けなくて結構です. 学生番号・氏名をお忘れなく.
- 解けなかった問題についても、「このように考えてここまでわかったがその先がわからない」といったことや、「このように考えたが解くことができなかった」といったことを書いてくれば、内容に応じて評価します.
- ただし、レポートの体をなさないものは不提出扱いとします. また、他人のレポートをほぼ丸写ししたと思われるものは (写したレポート, 写されたレポート双方を) 不提出扱いとし、さらに大幅な減点とします.
- レポートは添削した後返却します.

問1 $A \subset \mathbb{R}$ を空でない集合, $\{f_n(x)\}$ を A 上の関数列, $f(x)$ を A 上の関数とする.

(1) $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に A 上で一様収束することを

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall x \in A \left(n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

で定義した.

このことの**否定**, 即ち「 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に A 上で一様収束しない」ことの定義を論理記号を用いて表せ.

(このまま否定を作ると痛い目に遭います. 講義中に述べた注意に気をつけましょう.)

←昨年度の解析学 I レポート問題 No.2 **問4** (1) でも注意しました)

$$(2) f_n(x) = x^n \ (n \in \mathbb{N}), f(x) = \begin{cases} 0 & (x \in [0, 1)) \\ 1 & (x = 1) \end{cases} \text{ とおくとき, 関数列 } \{f_n(x)\} \text{ は } f(x)$$

に $[0, 1]$ 上で一様収束しないことを, (1) で述べた定義に従って示せ.

問2 $A \subset \mathbb{R}$ を空でない集合, $\{f_n(x)\}, \{g_n(x)\}$ を A 上の関数列, $f(x), g(x)$ を A 上の関数とする. いま, $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に A 上で一様収束し, $\{g_n(x)\}$ が $g(x)$ に A 上で一様収束すると仮定する. このとき, 関数列 $\{f_n(x) + g_n(x)\}$ は $f(x) + g(x)$ に A 上で一様収束することを示せ¹.

問3 次の区間 I 上の関数列 $\{f_n(x)\}$ に対して,

(i) $y = f_n(x)$ のグラフの概形をかけ.

(ii) 極限関数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ を求めよ.

(iii) $\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に I 上で一様収束するか否かを判定せよ.

$$(1) I = [0, 1], f_n(x) = \frac{x^2}{n}.$$

$$(2) I = \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x^2}{n}.$$

$$(3) I = [0, 1], f_n(x) = \begin{cases} nx & \left(0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \right) \\ 1 - nx & \left(\frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \right) \\ 0 & \left(\frac{1}{n} \leq x \leq 1 \right) \end{cases}.$$

¹解けた方への発展問題: では, 同じ仮定の下で, 関数列 $\{f_n(x)g_n(x)\}$ は $f(x)g(x)$ に A 上で一様収束すると言えるでしょうか?