

プリントは <https://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/takimoto/R7Kai3.html> にも置いてあります.

問 1 6/18 の講義で説明した項別積分の箇所で挙げた例を真似ればできるでしょう. 考えている関数項級数が等比級数ですので, (1) は定義に従って直接示すこともできますが, 今となっては M-test かべき級数の一般論を用いるのがはやいでしょう.

(1) **【証明】** 任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ に対して $|x^{2n-2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ であり, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{4}{3}$ であるから, M-test より $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2}$ は $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上で一様収束する. ■

注意. 6/25 の講義で示す「べき級数は収束半径内で広義一様収束する」という事実を用いると, 下記のようにもっとあっさりと証明が書けます.

【別証】 べき級数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2}$ は $|x| < 1$ で収束し, $|x| \geq 1$ で発散するので, 収束半径は 1 である. 閉区間 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ は $(-1, 1)$ に含まれているので, $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2}$ は $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上で一様収束する. ■

(2) **【解答】** $f_n(x) = x^{2n-2}$ とおくと $\{f_n\} \subset C\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$ であるから, (1) の結果より

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} x^{2n-2} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right]_0^{\frac{1}{2}} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^{2n-1}}$$

が成立する. 左辺を計算すると

$$(\text{左辺}) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^2} = \left[\frac{1}{2} \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log 3$$

であるから, 求める級数の和は $\frac{1}{2} \log 3$ である.

コメント. 等比数列・等比級数の和の公式を間違えていたり使えなかったりという答案が目につきました. さらに, $\frac{1}{1-x^2}$ の積分が $\arcsin x$ になっていたり, $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right)$ までは正しいのにそれを積分したら $\frac{1}{2} (\log(1+x) + \log(1-x))$ になっていたり, などの計算ミスが多くありました. 十分に気をつけてください. 計算力は日頃の努力の賜物です.

問2 最初に申し上げておきますが、この問題は大変重要な問題です！ 訂正された箇所がある方はしっかり復習して理解を深めておいてください。与えられた関数項級数が連続であることや C^1 級 (または C^2 級, C^3 級, ……) であることを示すためには何をしなければいけないのか、講義ノートや教科書を見ながらもう一度確認してください。

さて、(1) は M-test を用いて解けたという方も、同じ手法で (2) に取り組もうとしたときに悩んでしまったのではないのでしょうか。 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2x}{(x^2 + n^2)^2}$ が $\mathbb{R}$ 上で一様収束することを示すために M-test を用いようとして、 $\left| \frac{-2x}{(x^2 + n^2)^2} \right|$ の分母は n^4 で下から押さえられる訳ですが、分子を ($x \in \mathbb{R}$ に依らない) 何かで上から押さえることはできません。ではどうするか？ ……この問題の場合は、別の方法で頑張って $\left| \frac{-2x}{(x^2 + n^2)^2} \right|$ を $x \in \mathbb{R}$ に依らない何かで上から押さえられることを示すか、あるいは、講義でも述べた「 $\mathbb{R}$ 上で広義一様収束する」ことを示すか、二つの方法があります。

(1) **【証明】** $f_n(x) = \frac{1}{x^2 + n^2}$ とおくと、 $\{f_n\} \subset C(\mathbb{R})$ である。

次に、任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $|f_n(x)| = \frac{1}{x^2 + n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ が成立し、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ は収束するので、M-test より $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で一様収束する。

従って、関数項級数の和 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で連続である。 ■

(2) **【証明1】** $\{f_n\} \subset C^1(\mathbb{R})$ であり、(1) より $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は $\mathbb{R}$ 上一様収束する¹。 ……(*)

次に、 $g_n(x) = f_n'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + n^2)^2}$ とおくと、 $g_n(x)$ は奇関数であり、 $g_n(x) \leq 0$ ($\forall x \in [0, \infty)$) であるから、 $|g_n(x)|$ の $x \in \mathbb{R}$ における上限は $\tilde{g}_n(x) = \frac{2x}{(x^2 + n^2)^2}$ の $x \in [0, \infty)$ における上限に等しい。 $\tilde{g}_n'(x) = \frac{2n^2 - 6x^2}{(x^2 + n^2)^3}$ であるから、 $\tilde{g}_n(x)$ は $\left[0, \frac{n}{\sqrt{3}}\right]$ で単調増加、 $\left[\frac{n}{\sqrt{3}}, \infty\right)$ で単調減少である。従って

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n'(x)| = \tilde{g}_n\left(\frac{n}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8n^3}$$

が任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して成立し、さらに $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\sqrt{3}}{8n^3}$ は収束するので、M-test より $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で一様収束する。

¹実際には「 $\exists a \in \mathbb{R}$ s.t. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)$ が収束する」を示せばよいわけで、実際 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ が収束する、と書けば良いわけですが、この問題ではもっと強いことを (1) で証明しているわけです。

以上の結果, 項別微分の定理より $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で C^1 級であり $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2x}{(x^2 + n^2)^2}$ が成立する. ■

【証明2】 (*) までは同様. 任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して

$$\begin{aligned} |f_n'(x)| &= \frac{2|x|}{(x^2 + n^2)^2} \\ &\leq \frac{2|x|}{2|x|n(x^2 + n^2)} \quad (\because \text{相加平均} \cdot \text{相乗平均の定理より } x^2 + n^2 \geq 2|x|n) \\ &= \frac{1}{n(x^2 + n^2)} \leq \frac{1}{n^3} \end{aligned}$$

が成立する. $x = 0$ でも $|f_n'(x)| = 0 \leq \frac{1}{n^3}$ が成立するので, 任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $|f_n'(x)| \leq \frac{1}{n^3}$ が成立することが分かる. また, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ は収束するので, M-test より $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で一様収束する. (以下同様) ■

【証明3】 (*) までは同様. 任意に $\mathbb{R}$ 内の閉区間 $[a, b]$ を取る. $C = \max\{|a|, |b|\}$ とおくと, 任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の $x \in [a, b]$ に対して

$$|f_n'(x)| = \frac{2|x|}{(x^2 + n^2)^2} \leq \frac{2C}{n^4}$$

が成立し, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2C}{n^4}$ は収束するので, M-test より $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ は $[a, b]$ 上で一様収束する. 即ち, $\mathbb{R}$ 上で広義一様収束することが分かる. (以下同様) ■

注意. 三つの答案を見比べると【証明3】が最もラクだと思いいになった方が多いと思います. この問題では $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で一様収束したのでまだ良かったのですが, 「 $\mathbb{R}$ 上で一様収束はしないが**広義一様収束**はする」という状況もよく起こります. 広義一様収束の使い方, そして証明の仕方をしっかり身につけましょう.

問3 「べき級数の収束半径といえば, ダランベールの判定法と, 一応コーシーの判定法だけ覚えておけば十分! あとは知らん!」などという発言は, **口が裂けても絶対にしてはいけません**. 収束半径の定義, 収束半径の意味, 収束半径に関する性質, それらすべてをしっかりと身に付けておいてください.

【解答】 (1) $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ とおくと,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} \right| = \frac{n+1}{2(2n+1)} \rightarrow \frac{1}{4} \quad (n \rightarrow \infty)$$

であるから, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$ の収束半径は $\frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$ である.

(2) (1) の結果より, $y = x^2$ とおくと, べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^{2n}$ は

$|y| < 4$ のとき収束し, $|y| > 4$ のとき発散する

ことがわかる. 故に,

$|x^2| < 4$ のとき収束し, $|x^2| > 4$ のとき発散する,

即ち,

$|x| < 2$ のとき収束し, $|x| > 2$ のとき発散する.

従って, べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^{2n}$ の収束半径は 2 である.

問 4 上極限・下極限に関する問題です. 定義を確認しましょう.

(1) 【証明】 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\beta_n = \inf_{k \geq n} a_k \leq a_n \leq \sup_{k \geq n} a_k = \alpha_n$ が成立する. 最左辺と最右辺の $n \rightarrow \infty$ での極限を考えれば

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

を得る. ■

(2) 【証明】 $\alpha_n = \sup_{k \geq n} a_k$ とおいたとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$ となることを示す.

任意に $\varepsilon > 0$ を取る. (i) により

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \implies a_n < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$$

が成立する. 任意に $n \geq N$ を満たす $n \in \mathbb{N}$ を取る. すると, $k \geq n$ なる任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $k \geq n \geq N$ であるので $a_k < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$ が成り立つことから

$$\alpha_n = \sup_{k \geq n} a_k \leq \alpha + \frac{\varepsilon}{2} < \alpha + \varepsilon$$

が成立する．また，(ii) により ($a_n > \alpha - \varepsilon$ を満たす n は無限個あるので) $a_{n_0} > \alpha - \varepsilon$ を満たす $n_0 \geq n$ を取ることができる．従って，

$$\alpha_n = \sup_{k \geq n} a_k \geq a_{n_0} > \alpha - \varepsilon$$

が成立する．これらから $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$ を得るので， $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$ が示された．

注意． 6/20 の講義で示した定理，**問 4** (2) の結果と演習の**問題 4-16** の結果を合わせると，有界な数列 $\{a_n\}$ に対して次の三つの条件が同値であることが示されます．

- (a) $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$.
 - (b) 次の二つが成立する．
 - (i) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \implies a_n < \alpha + \varepsilon$.
 - (ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して， $a_n > \alpha - \varepsilon$ を満たす n は無限個存在する．
 - (c) α は $\{a_n\}$ の収束する部分列の極限として現れる数の最大値である．
- 下極限 ($\liminf$) についても同様のことが言えます．

コメント． 証明をよく見ると，有界な数列 $\{a_n\}$ に対して

$$(i) \iff \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \alpha$$

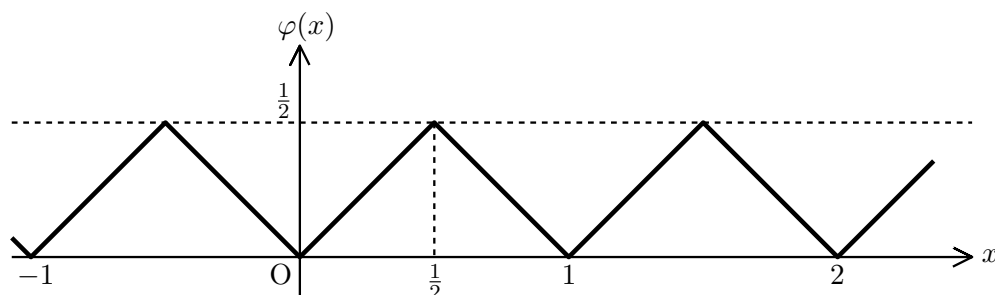
と

$$(ii) \iff \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \alpha$$

が成り立つことが分かります．

問 5 「 $\mathbb{R}$ 上の連続関数であるが，全ての点で微分不可能である関数」を比較的簡単に構成することができる，というのがこの問題の趣旨です．教科書の 7.5 節にそのような関数の例が載っていきまして，そちらはワイエルシュトラス関数と呼ばれるもののなのですが，この問題に登場する関数はそれとは別のもので**高木関数**と呼ばれています²．

(1) グラフは下の図の通りです．



²日本を代表する数学者の一人である高木貞治 (1875-1960) に由来しています．解析学 III の参考書としている「解析概論」の著者でもあります． $f(x)$ のグラフがどうなるかについては，Mathematica 等を使ってコンピュータで描いてみるか，またはインターネットで「高木関数」を検索してみてください．

(2) M-test を用いて関数項級数の連続性を示す典型的な問題です.

【証明】 任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して, $|\varphi(10^n x)| \leq \frac{1}{2}$ であるから

$$\left| \frac{\varphi(10^n x)}{10^n} \right| \leq \frac{1}{2 \cdot 10^n}$$

が成立し, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 10^n}$ は収束するので, M-test より $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(10^n x)}{10^n}$ は $\mathbb{R}$ 上で一様収束する.

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\frac{\varphi(10^n x)}{10^n}$ は $\mathbb{R}$ 上で連続であるので, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(10^n x)}{10^n}$ も連続である. ■

(3) 何人かの方がトライしていましたが, 正解者は皆無でした. ですので, ここでは敢えて解答は書かないこととして, もう一度皆さんに考えていただきたいと思います.

任意に $x_0 \in \mathbb{R}$ を取ったとき, $f(x)$ が $x = x_0$ で微分可能でないこと, 即ち極限值 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ が存在しないことを示します. まずは何を示せばよいかを考えましょ

う. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha$ であるとは,

x_0 に収束する任意の数列 $\{x_n\}$ (ただし, $x_n \neq x_0$ ($n \in \mathbb{N}$)) に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \alpha$$

が成立する.

ということでしたから, 次が証明できれば O.K. です.

x_0 に収束する数列 $\{x_n\}$ が存在して, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$ が存在しない.

では $\{x_n\}$ をどう選ぶかというのが最大の問題で, そこを皆さんに考えていただきたいわけですが. もちろんいろいろな選び方がありますが, 例えば $x_n = x_0 + 10^{-n}$ or $x_n = x_0 - 10^{-n}$ とするのが一つの方法です (± のどちらかにするかは x_0 や n の値に依って変えます). ± をうまく選ぶと, $a_n = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$ とおくと $|a_{n+1} - a_n|$ は 1 以上になって $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が存在しないことが言えます.