解析学 III　レポート問題 No.2　解答・解説　　（2025.6.11 出題）

プリントは https://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/takimoto/R7Kai3.html にも置いてあります.

問１ 問題文にヒントを詳しく書いてしまったので，それ以上のコメントはありませんが，一様収束と広義一様収束の違いはしっかり認識するようにしましょう.

[証明] $[0,1)$ に含まれる任意の閉区間 $[a,b]$ を取る．このとき $0 \le a < b < 1$ が成立するので，

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[a,b]} |x^n - 0| = \sup_{x\in[a,b]} x^n = b^n \to 0 \quad (n\to\infty)$$

が成立する．従って $\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に $[0,1)$ 上で広義一様収束する. ■

問２ (1) の「区間 $[0,\pi]$ 上で一様収束しないこと」の証明は，定義に従った解答も良いですが下の解答がはやいです．(2) はヒントに誤植があったことをお詫び申し上げます（問題を修正したら，$[0,1]$ を $\mathbb{R}$ に変更し忘れました……）．論理的には極限関数の導出は不要です（$\{f_n(x)\}$ が $f(x)\equiv 0$ に $\mathbb{R}$ 上で一様収束することだけ示せば十分ですので）.

(1) **[証明]** まず $\{f_n(x)\}$ の極限関数 $f(x)$ を求める．任意に $x\in[0,\pi]$ を取る.

<u>(i) $x=0$ または $x=\pi$ のとき</u>　任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $f_n(0) = 1^{2n} = 1$, $f_n(\pi) = (-1)^{2n} = 1$ であるから，$f(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 1$, $f(\pi) = \lim_{n\to\infty} f_n(\pi) = 1$.

<u>(ii) $x\in(0,\pi)$ のとき</u>　$|\cos x| < 1$ であるから，$f_n(x) = (\cos x)^{2n} \to 0$ $(n\to\infty)$.

従って，極限関数は $f(x) = \begin{cases} 1 & (x=0 \text{ または } x=\pi) \\ 0 & (x\in(0,\pi)) \end{cases}$ である．任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $f_n(x)$ は $[0,\pi]$ 上の連続関数であるが，$f(x)$ は $x=0$ と $x=\pi$ で連続でないので，$\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に $[0,\pi]$ 上で一様収束しない.

次に，$(0,\pi)$ に含まれる任意の閉区間 $[a,b]$ を取る．このとき $0<a<b<\pi$ が成立し，$[a,b]$ 上では $f(x)=0$ であるので，

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{x\in[a,b]} \left|\cos^{2n} x - 0\right| \\
&= \sup_{x\in[a,b]} \cos^{2n} x \\
&= \max\{\cos^{2n} a, \cos^{2n} b\} \quad (\because \cos x \text{ は } [a,b] \text{ 上で単調減少}) \\
&\to 0 \quad (n\to\infty)
\end{aligned}$$

が成立する．従って $\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に $(0,\infty)$ 上で広義一様収束する. ■

<u>**コメント．**</u> 前半については，定義に従ったり，$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)|$ を考えた答案が多かったです．上の答案は**「連続関数列の一様収束極限は連続である」**という定理を用いています．極限の不連続性に気がつけばすぐに一様収束でないと判定ができとても便利なのでしっかり復習して使えるようにしておきましょう.

<u>**注意．**</u> なお，関数列 $\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に<u>区間 $(0,\pi)$ 上でも一様収束しません</u>.（問：これを示せ）

(2) **[解答]** まず $\{f_n(x)\}$ の極限関数 $f(x)$ を求める．任意に $x \in \mathbb{R}$ を取る．

<u>(i) $|x| < 1$ のとき</u>　$|f_n(x)| = \left|\dfrac{x^n}{(1+x^2)^n}\right| \leq |x|^n \to 0$ $(n \to \infty)$ より，はさみうちの原理から $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

<u>(ii) $x = \pm 1$ のとき</u>　$|f_n(x)| = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \to 0$ $(n \to \infty)$ より，$f(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

<u>(iii) $|x| > 1$ のとき</u>　$|f_n(x)| = \left|\dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)^n}\right| \leq \left(\dfrac{1}{|x|}\right)^n \to 0$ $(n \to \infty)$ より，はさみうちの原理から $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

従って，極限関数は $f(x) \equiv 0$ である．次に $g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \left(\dfrac{|x|}{1+x^2}\right)^n$ とおくと，$x \neq 0$ のとき相加平均・相乗平均の不等式により $1 + x^2 \geq 2|x|$ であり，$x = 0$ のときは $g_n(0) = 0$ であるので，$g_n(x) \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ であるから，

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} g_n(x) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

故に，$\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ $(n \to \infty)$ であるから，$\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に $\mathbb{R}$ 上で<u>一様収束する</u>.

問３ 講義でも言及しましたが，区間が閉区間 $[a,b]$ か無限区間 $[a,\infty)$ なのかで話がだいぶ変わります．この問題は大変重要ですのでしっかりと復習して下さい．

(1) **[証明]** $[a,b]$ 上の連続関数列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に $[a,b]$ 上で一様収束するので，$f(x)$ は $[a,b]$ 上で連続である．従って，$g(x)$ が定義できることに注意する．

任意に $\varepsilon > 0$ を取る．このとき，$\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に $[a,b]$ 上で一様収束するので

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall x \in [a,b] \ \left(n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}\right)$$

が成立する．この N に対して，任意に $x \in [a,b]$ を取ると，$n \geq N$ ならば

$$\begin{aligned}
|g_n(x) - g(x)| &= \left|\int_a^x f_n(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right| \\
&\leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)|\,dt \\
&\leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,dt < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dt = \varepsilon.
\end{aligned}$$

となるので，$\{g_n(x)\}$ は $g(x)$ に $[a,b]$ 上で一様収束する．■

[別証] 仮定より $\sup_{t\in[a,b]} |f_n(t)-f(t)| \to 0$ $(n\to\infty)$ である．従って，

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in[a,b]} |g_n(x)-g(x)| &= \sup_{x\in[a,b]} \left| \int_a^x f_n(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right| \\
&\le \sup_{x\in[a,b]} \int_a^x |f_n(t)-f(t)|\,dt \\
&\le \int_a^b |f_n(t)-f(t)|\,dt \\
&\le \int_a^b \left(\sup_{t\in[a,b]} |f_n(t)-f(t)| \right) dx = (b-a) \sup_{t\in[a,b]} |f_n(t)-f(t)| \to 0 \quad (n\to\infty)
\end{aligned}$$

となるので，$\{g_n(x)\}$ は $g(x)$ に $[a,b]$ 上で一様収束する． ■

(2) **[解答]** 答は<u>偽</u>である．$f_n(x) \equiv \dfrac{1}{n}$ $(x\in[0,\infty))$ とおくと，

$$\sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x)-0| = \frac{1}{n} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

であるから，$\{f_n(x)\}$ は $f(x)\equiv 0$ に $[0,\infty)$ 上で一様収束する．一方，

$$g_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt = \frac{x}{n}, \qquad g(x) = \int_0^x f(t)\,dt = 0$$

であるので，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\sup_{x\in[0,\infty)} |g_n(x)-g(x)| = \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{x}{n} = \infty$$

となる．従って $\{g_n(x)\}$ は $g(x)$ に $[0,\infty)$ 上で一様収束しない．

<u>**コメント．**</u> (1) で出てくる $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$ を，$\dfrac{\varepsilon}{x-a}$ とおいた答案がいくつか見られました．x は変数ですから，$\dfrac{\varepsilon}{x-a}$ は x の値によって変わってしまい正の定数ではありません．(2) は，反例を挙げるのは難しいと感じた人が多かったと思いますが，例を考えるのは理解を深めるのには大事です．上の例以外にも反例はあって，たとえば $f_n(x) = \dfrac{1}{n(x+1)}$ や $f_n(x) = \dfrac{\sin\frac{x}{n}}{n}$ も反例となっています．自らの手で検証してみてください．

$\boxed{\textbf{問4}}$ 定義に戻って証明する方法，コーシーの判定法を用いて証明する方法などいろいろな解答が考えられますが，最も簡単なのはレポート No.1 $\boxed{\textbf{問2}}$（の考え方）を用いたものでしょうか.

[証明] $s_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ とおくと，仮定により $\big\{s_n(x)\big\}_{n=1}^{\infty}$ はある関数 $s(x)$ に A 上で一様収束する．このとき，$\big\{s_{n-1}(x)\big\}_{n=2}^{\infty}$ も同じ関数 $s(x)$ に A 上で一様収束し，$f_n(x) = s_n(x) - s_{n-1}(x)$ であるから，$\{f_n(x)\}$ は $s(x) - s(x) = 0$ に A 上で一様収束する． ■

注意． 最後の部分では，次の命題を用いています.

> **命題．** $\{f_n(x)\}, \{g_n(x)\}$ を A 上の関数列とする．いま，$\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に A 上で一様収束し，$\{g_n(x)\}$ が $g(x)$ に A 上で一様収束すると仮定する．このとき，関数列 $\{f_n(x) - g_n(x)\}$ は $f(x) - g(x)$ に A 上で一様収束する．

レポート No.1 $\boxed{\textbf{問2}}$ では足し算の場合を出題しています．この**命題**は引き算バージョンですが，証明方法は同じですよね.

[別証] $s(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ とおく．仮定より $\displaystyle\sup_{x\in A}\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - s(x)\right| \to 0 \ (n\to\infty)$ であるから，

$$
\begin{aligned}
\sup_{x\in A}|f_n(x) - 0| &= \sup_{x\in A}\left|\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - s(x)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} f_k(x) - s(x)\right)\right| \\
&\le \sup_{x\in A}\left(\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - s(x)\right| + \left|\sum_{k=1}^{n-1} f_k(x) - s(x)\right|\right) \quad (\because \text{三角不等式}) \\
&\le \sup_{x\in A}\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - s(x)\right| + \sup_{x\in A}\left|\sum_{k=1}^{n-1} f_k(x) - s(x)\right| \quad (\because \sup \text{の性質}) \\
&\to 0 + 0 = 0 \quad (n\to\infty)
\end{aligned}
$$

であるから，$\{f_n(x)\}$ は 0 に A 上で一様収束する． ■