解析学 III　レポート問題 No.1　解答・解説　　（2025.6.6 出題）

プリントは https://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/takimoto/R7Kai3.html にも置いてあります．

問１ 講義で述べたように，$\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に A 上で一様収束することは

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall x \in A,\ \forall n \geq N,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

と書き換えることができます．(1) はこの否定を考えると答案が書きやすいでしょう．

(1) **［解答］** $\underline{\exists\varepsilon > 0 \text{ s.t.}}$
$\underline{\forall N \in \mathbb{N},\ \exists x \in A,\ \exists n \geq N \text{ s.t. } |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon.}$

(2) 真っ先に ε を決めなければいけません．得てして「実は ε は正であれば何でもよい」という場合もありますが，この問題の場合はそうではありません．$x = 1$ のときは常に $|f_n(x) - f(x)| = 0$ ですから $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$ にはなり得ないので $x \in [0, 1)$ である必要があります．そのとき $|f_n(x) - f(x)| = x^n$ ですから $x^n \geq \varepsilon$ が成り立つ $x \in [0, 1)$ を探すわけですが，常に $x^n < 1$ ですから ε は 1 より小さい数を選ばなければいけません．

［証明］ $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ と定める．

いま，任意に $N \in \mathbb{N}$ を取る．このとき，$x = 2^{-\frac{1}{N}}$, $n = N$ とおくと $0 < x < 1$ である（もちろん $x \in [0, 1]$ かつ $n \geq N$）から，

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^N - 0| = x^N = \left(2^{-\frac{1}{N}}\right)^N = \frac{1}{2} \geq \varepsilon$$

が成立する．従って $\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に $[0, 1]$ 上で一様収束しない．■

問２ 解答の方針は，数列の場合の「$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$ ならば $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$」と同じです．同様の方法，一様収束する関数列の差やスカラー倍も一様収束することが示されます．

［証明］ 任意に $\varepsilon > 0$ を取る．仮定より，

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall x \in A,\ \forall n \geq N_1,\ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall x \in A,\ \forall n \geq N_2,\ |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成立する．ここで $N = \max\{N_1, N_2\} (\in \mathbb{N})$ とおくと，任意の $x \in A$ と任意の $n \geq N$ に対して

$$\begin{aligned}
|(f_n(x) + g_n(x)) - (f(x) + g(x))| &= |(f_n(x) - f(x)) + (g_n(x) - g(x))| \\
&\leq |(f_n(x) - f(x))| + |(g_n(x) - g(x))| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

が成立する．従って，$\{f_n(x) + g_n(x)\}$ は $f(x) + g(x)$ に A 上で一様収束する．■

[別証] 仮定より $\sup_{x\in A}|f_n(x)-f(x)|\to 0,\ \sup_{x\in A}|g_n(x)-g(x)|\to 0\ (n\to\infty)$ であるから,

$$\begin{aligned}\sup_{x\in A}|(f_n(x)+g_n(x))-(f(x)+g(x))| &= \sup_{x\in A}|(f_n(x)-f(x))+(g_n(x)-g(x))| \\ &\le \sup_{x\in A}\big(|(f_n(x)-f(x))|+|(g_n(x)-g(x))|\big) \\ &\le \sup_{x\in A}|(f_n(x)-f(x))|+\sup_{x\in A}|(g_n(x)-g(x))| \\ &\to 0 \quad (n\to\infty)\end{aligned}$$

が成立する．従って，$\sup_{x\in A}|(f_n(x)+g_n(x))-(f(x)+g(x))|\to 0\ (n\to\infty)$ であるから，$\{f_n(x)+g_n(x)\}$ は $f(x)+g(x)$ に A 上で一様収束する． ■

注意． レポート問題の脚注にあった「$\{f_n(x)g_n(x)\}$ は $f(x)g(x)$ に A 上で一様収束すると言えるか？」$\cdots\cdots(*)$ ですが，答は**偽**です．例えば，$A=\mathbb{R}$ として，$f_n(x)=x^2,\ g_n(x)\equiv\dfrac{1}{n}$ とおくと，$\{f_n(x)\}$ は $f(x)=x^2$ に，$\{g_n(x)\}$ は $g(x)\equiv 0$ に A 上で一様収束します．一方，$f_n(x)g_n(x)=\dfrac{x^2}{n}$ となりますが $\{f_n(x)g_n(x)\}$ は $f(x)g(x)\equiv 0$ に A 上で一様収束しません（証明は **問３** (2) を参照）．

しかし，もしも「極限関数 $f(x),g(x)$ が A 上で有界」という条件を付け加えれば，命題 $(*)$ は真となります．証明は良い演習問題ですので各自で考えてみましょう[1]．

問３ 6/6 の講義で証明した命題（$\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に I 上一様収束することと同値な命題）を用いると早く解けるでしょう．(3) の (ii)（極限関数を求める問題）は正解者は多かったですが，きちんと議論できた方は非常に少なかったです．解答をよく読んで，答案に何を書かなければいけないかを確認してください．極限関数（＝各点収束の極限）を求めるわけですから，任意に $x_0\in I$ を 1 つ取って $\{f_n(x_0)\}$ の極限値を考えなければいけません．

なお，(i) の解答は省略します．グラフを書く際には定義域に注意してください．また，どの情報を書けば十分かを意識するようにしましょう．

[解答] (1) (1) (ii) 任意の $x\in[0,1]$ に対して $\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^2}{n}=0$ であるので，極限関数は $f(x)\equiv\underline{0}$．

(iii) $\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in[0,1]}\dfrac{x^2}{n}=\dfrac{1}{n}\to 0\ (n\to\infty)$ であるから，$\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に $[0,1]$ 上で<u>一様収束する</u>．

(2) (ii) 任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して $\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^2}{n}=0$ であるので，極限関数は $f(x)\equiv\underline{0}$．

(iii) 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して，$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in\mathbb{R}}\dfrac{x^2}{n}=\infty$ であるから，$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|$ は $n\to\infty$ のとき 0 に収束しない．従って $\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に $\mathbb{R}$ 上で<u>一様収束しない</u>．

[1] これを用いると,「A が閉区間で，$\{f_n(x)\}$, $\{g_n(x)\}$ が A 上の連続関数列である」という条件を付け加えても命題 $(*)$ が真であることが分かります（証明には 6/11 の講義中で示した定理を用いる）．

注意． この例から分かるように，関数列が同じでも，定義域が異なると一様収束したりしなかったりするわけです．一般に，定義域が広ければ広いほど一様収束しにくくなります．

注意． $\mathbb{R}$ 上では $\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に一様収束しませんが，$\mathbb{R}$ の任意の閉区間 $[a,b]$ 上では $\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に一様収束します（証明は (1) と同様です）．即ち，6/11 の講義で学習する用語を使えば，「$\mathbb{R}$ 上で $\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に**広義一様収束**する」ことが言えます．

(3) (ii) 任意に $x_0 \in [0,1]$ を取る，
(a) $x_0 = 0$ のとき　任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n(0) = 0$ であるから，$f(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$.
(b) $x_0 \in (0,1]$ のとき　$N = \left[\dfrac{1}{x_0}\right] + 1$ とおくと，任意の $n \geq N$ に対して

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \frac{1}{\frac{1}{x_0}} = x_0 \ (\leq 1)$$

であるから $f_n(x_0) = 0$ である．従って $f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = 0$.

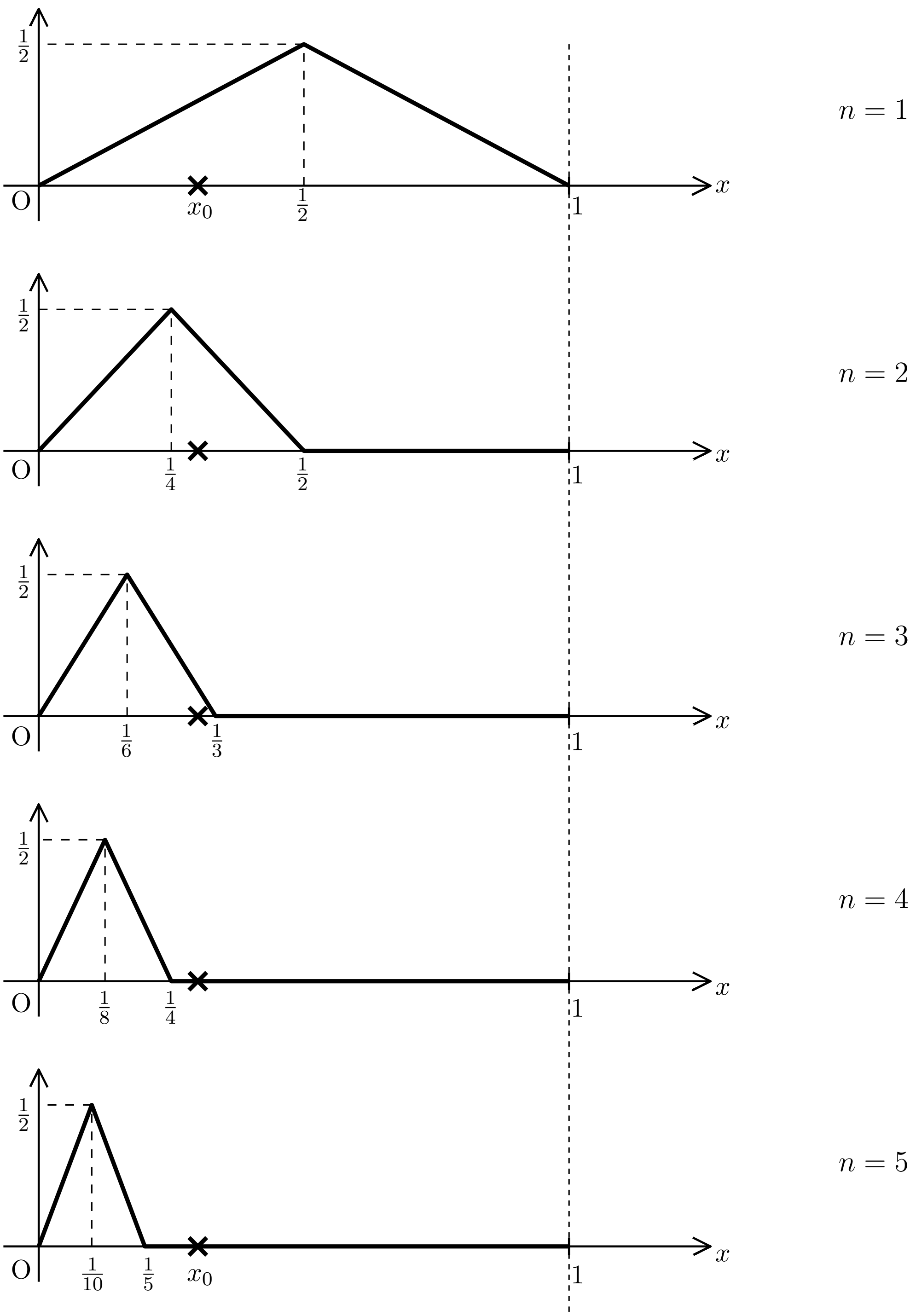
以上の結果，極限関数は $f(x) \equiv \underline{0}$ である．

(iii) $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = f_n\left(\dfrac{1}{2n}\right) = \dfrac{1}{2}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ であるから，$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)-f(x)| \to 0$ $(n \to \infty)$ ではない．従って，$\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に $[0,1]$ 上で一様収束しない．

注意． たとえ問われていなかったとしても**まずはグラフを描いてみる**ことが基本です（中学・高校の数学でも同じことですけど）．(3) の $f_n(x)$ のグラフは右ページのようになります．

$x_0 = 0$ のときは，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n(0) = 0$ ですから，$f(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$ となります．($f_n\left(\dfrac{1}{2n}\right) = \dfrac{1}{2}$ ですので，点 $\left(\dfrac{1}{2n}, \dfrac{1}{2}\right)$ が $n \to \infty$ のときに $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ に近づくから $f(0) = \dfrac{1}{2}$ だと思った方がいました．そうではなくて，$x_0 = 0$ のときの $f_n(x_0)$ の値を考えてその $n \to \infty$ の極限を考えます）

一方，$x_0 \in (0,1]$ のときはどうなるかということを考えるために，x_0 を「✕」印が付いた点であると仮定しましょう．すると，$f_1(x_0), f_2(x_0), f_3(x_0)$ までは 0 ではないですが，$f_4(x_0)$ 以降は全て 0 になることがわかるでしょう．ですから $f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = 0$ となります．他の $x_0 \in (0,1]$ に対しても，ある番号（実際には $\left[\dfrac{1}{x_0}\right] + 1$ 番目）より先の n に対しては $f_n(x_0) = 0$ となるので，上のような解答が得られます．



$n=1$
$\frac{1}{2}$
O
x_0
$\frac{1}{2}$
1
x
$n=2$
$\frac{1}{2}$
O
$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$
1
x
$n=3$
$\frac{1}{2}$
O
$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{3}$
1
x
$n=4$
$\frac{1}{2}$
O
$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{4}$
1
x
$n=5$
$\frac{1}{2}$
O
$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{5}$
x_0
1
x