解析学 III　メモ

本講義における定義，命題，定理等について，その内容を簡単にまとめたものです．本講義の流れを理解するための一助としていただければ幸いです．なお，**Def.**, **Th.**, **Ex.** や **Prop.** などの後にかっこ書きしてあるものは，教科書にある**定義**，**定理**などの番号である．

１．関数列の各点収束と一様収束

解析学 I では数列（実数列）の収束を学び，数学通論 I では（おそらく）距離空間上の点列の収束を学んだ．ここでは，実数の部分集合 A 上で定義された関数の無限列 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_n(x)$, $\ldots$ の「収束」について学ぶ．

以下，しばらくは $A \subset \mathbb{R}$ とし，$\{f_n(x)\}$ を A 上の関数列とする．また，$f(x)$ を A 上の関数とする．

Def. $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に A 上で**各点収束**する
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$「$\forall x_0 \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geq N \Longrightarrow |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$」
（$\Longleftrightarrow \forall x_0 \in A, \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$）

Ex.（例 7.1.1） $f_n(x) = x^n$, $A = [0,1]$ とおくと，関数列 $\{f_n(x)\}$ は A 上で
$f(x) = \begin{cases} 0 & \bigl(x \in [0,1)\bigr) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$ に各点収束する．

$\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に A 上で各点収束することの定義における N は $\varepsilon > 0$ と $x_0 \in A$ に依存するが，もしも N が（$x_0 \in A$ に無関係に）ε のみに依って決まる場合には，$\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に収束する「速さ」が一様であると言える．

Def.（定義 7.1.3） $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に A 上で**一様収束**する
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$「$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall x \in A, \bigl(n \geq N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\bigr)$」

これを $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ on A $(n \to \infty)$, $f_n \rightrightarrows f$ on A $(n \to \infty)$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$（$A$ 上一様）などと書く．

$\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に A 上で一様収束することの定義における N は ε のみに依存する．定義から，一般に「一様収束 $\Longrightarrow$ 各点収束」は成り立つと分かるが，逆は一般に成り立たない．

Ex.（例 7.1.2） $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$, $A = [0,\infty)$ とおくと，関数列 $\{f_n(x)\}$ は A 上で $f(x) \equiv 0$ に一様収束する．

$\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に一様収束する（しない）ことを定義通りに示すスキルももちろん重要であるが，一様収束と同値な条件を理解し，使いこなすようになることも重要である．

Prop.（命題 7.1.4） 次の二つの命題は同値である．

① $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ on A $(n \to \infty)$.

② $\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ $(n \to \infty)$.

Ex.（命題 7.1.5） $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$ とおくと，関数列 $\{f_n(x)\}$ は $\mathbb{R}$ 上で $f(x) \equiv 0$ に一様収束する．

Th.（コーシーの判定法）（定理 7.1.7） 次の二つの命題は同値である．

① $\{f_n(x)\}$ が（ある関数に）A 上で一様収束する．
② $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall x \in A, \big(m, n \geq N \implies |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon\big)$.

次の定理は，**「連続関数列の一様収束極限は連続である」**ということを主張している．以下，$\{f_n(x)\}$ が区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上の**連続関数列**であることを，$\{f_n\} \subset C(I)$ と書くことにする．

Th.（定理 7.2.1）[1] $I \subset \mathbb{R}$ を区間とする．もし $\{f_n\} \subset C(I)$ かつ $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ on I $(n \to \infty)$ であれば，$f \in C(I)$ である．

この定理を用いると，関数列が**一様収束しない**ことを簡単に示せることがある．

Ex.（例 7.2.2） $f_n(x) = x^n$ とおくと，関数列 $\{f_n(x)\}$ は $I = [0,1]$ 上で $f(x) = \begin{cases} 0 & \big(x \in [0,1)\big) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$ に各点収束していたが，一様収束しない．なぜなら，もし $\{f_n(x)\}$ が I 上で一様収束するならば，各 $f_n(x)$ は I 上で連続だから，極限関数 $f(x)$ は I 上で連続であるが，$f(x)$ は $x = 1$ で連続ではないからである．

Th.（ディニの定理）（定理 7.2.3） $\{f_n\} \subset C\big([a,b]\big)$, $f \in C([a,b])$ とし，$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f_n(x) \leq \cdots$ $(\forall x \in [a,b])$ または $f_1(x) \geq f_2(x) \geq \cdots \geq f_n(x) \geq \cdots$ $(\forall x \in [a,b])$ であると仮定する．もし $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に $[a,b]$ 上で各点収束するならば，$\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に $[a,b]$ 上で一様収束する．

ディニの定理において，閉区間 $[a,b]$ 上で単調増加（または単調減少）な連続関数列 $\{f_n(x)\}$ が連続関数 $f(x)$ に各点収束していると仮定しているが，波線部の仮定を落とすことはできない（演習問題を参照）．

先程の例にあった $f_n(x) = x^n$ において，関数列 $\{f_n(x)\}$ は開区間 $(0,1)$ 上では一様収束しないが，任意の $a, b \in (0,1)$（ただし $a < b$）に対して $\{f_n(x)\}$ は閉区間 $[a,b]$ 上で（$f(x) \equiv 0$ に）一様収束する．このような一様収束より「少し弱い」収束の概念を定義する．

Def. $I \subset \mathbb{R}$ を区間とし，$\{f_n(x)\}$ を I 上の関数列，$f(x)$ を I 上の関数とする．

$\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に I 上で**広義一様収束（コンパクト一様収束）**する
$\overset{\text{def}}{\iff}$ I に含まれる任意の閉区間 $[a,b]$ に対して $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ on $[a,b]$ $(n \to \infty)$ が成り立つ

Ex. $f_n(x) = x^n$ とおくと，$\{f_n(x)\}$ は $f(x) \equiv 0$ に $(0,1)$ 上で一様収束しないが，$(0,1)$ 上で広義一様収束する．

[1] 教科書では「$\{f_n(x)\}$ を A 上連続な関数の列とする.」と書いていますが，通常は関数の連続性は区間の上で考えるので，ここでは $\{f_n(x)\}$ を区間 I 上の関数列であるとしています.

Cor. $I \subset \mathbb{R}$ を区間とする．もし $\{f_n\} \subset C(I)$ かつ $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に I 上で広義一様収束するならば，$f \in C(I)$ である．

Ex. $f_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$, $f(x) = e^x$ とおくと，$\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に $[0, \infty)$ 上で広義一様収束する．

次に，極限と積分の交換，極限と微分の交換について考える．

● $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\ (\forall x \in [a,b])}$ **ならば** $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx}$ **か？**

例えば，$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \left(0 \leq x \leq \dfrac{1}{2n}\right) \\ n(1-nx) & \left(\dfrac{1}{2n} \leq x \leq \dfrac{1}{n}\right) \\ 0 & \left(\dfrac{1}{n} \leq x \leq 1\right) \end{cases}$ とおくと，$\{f_n(x)\}$ は $[0,1]$ 上で $f(x) \equiv 0$ に各点収束する．しかし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 f(x)\,dx$ である．

それでは，極限と積分の交換が可能であるための十分条件は何であるか？ 実は，関数列の一様収束性がポイントとなる．

Th.（定理 7.3.2） $\{f_n\} \subset C\big([a,b]\big)$ かつ $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ on $[a,b]$ $(n \to \infty)$ であるならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ が成り立つ．

上の定理において，仮定が成り立つならば $f \in C\big([a,b]\big)$ であることに注意する．

$\boxed{\text{問}}$ 上の定理と同じ仮定の下で，$g_n(x) = \displaystyle\int_a^x f_n(t)\,dt$, $g(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ $(n \in \mathbb{N}, x \in [a,b])$ とおくとき，$g_n(x) \rightrightarrows g(x)$ on $[a,b]$ $(n \to \infty)$ であることを示せ．

Rem. 閉区間 $[a,b]$ の代わりに無限区間 $[a,\infty)$ にして，$\{f_n\} \subset C\big([a,\infty)\big)$ かつ $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ on $[a,\infty)$ $(n \to \infty)$ であり，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty f_n(x)\,dx$ が収束したとしても，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^\infty f_n(x)\,dx = \int_a^\infty f(x)\,dx$ が成り立つとは限らない．

● $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\ (\forall x \in [a,b])}$ **ならば** $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)}$ **か？**

p.2 にある例で見たように，$f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$ とおくと，$\{f_n(x)\}$ は $f(x) \equiv 0$ に $\mathbb{R}$ 上で一様収束する．しかし，$f_n'(x) = \cos nx$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n'(0) = 1 \neq 0 = f'(0)$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$ は成り立たない．

それでは，極限と微分の交換が可能であるための十分条件は何であるか？ 関数列 $\{f_n(x)\}$ の一様収束では不十分で，関数列 $\{f_n'(x)\}$ の一様収束性がポイントとなる．以下，$\{f_n(x)\}$ が区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上の $\boldsymbol{C^1}$ **級関数列**であることを，$\{f_n\} \subset C^1(I)$ と書くことにする．

Th.（定理 7.3.4） $\{f_n\} \subset C^1(I)$ であり，$\{f_n(x)\}$ は I 上の関数 $f(x)$ に I 上で各点収束し，$\{f_n'(x)\}$ は I 上の関数 $g(x)$ に I 上で一様収束すると仮定する．このとき，$\{f_n(x)\}$ は I 上で $f(x)$ に広義一様収束し，$f \in C^1(I)$ であり，$f'(x) = g(x) \left(= \lim_{n\to\infty} f_n'(x)\right)$ $(\forall x \in I)$ が成り立つ．

Rem. (i) 上の定理において,「$\{f_n(x)\}$ は I 上の関数 $f(x)$ に I 上で各点収束し」を,「ある $a \in I$ が存在して，極限値 $\lim_{n\to\infty} f_n(a)$ が存在し」に変えても結論は成立する．

(ii) 上の定理において,「$\{f_n'(x)\}$ は I 上の関数 $g(x)$ に I 上で一様収束する」を,「$\{f_n'(x)\}$ は I 上の関数 $g(x)$ に I 上で広義一様収束する」に変えても結論は成立する．

2．関数項級数とべき級数（整級数）

1 年次の解析学 I では，数列 $\{a_n\}$ から級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を考えた．同様にして，関数列 $\{f_n(x)\}$ から**関数項級数** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ を考えることができる．関数項級数についても，関数列の場合と同様に各点収束，一様収束が定義できる．

Def. $A \subset \mathbb{R}$ とし，$\{f_n(x)\}$ を A 上の関数列とする．

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ が A 上で**各点収束（一様収束，広義一様収束）**する

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\displaystyle s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ とおくとき，関数列 $\{s_n(x)\}$ がある関数 $s(x)$ に A 上で各点収束（一様収束，広義一様収束）する

このとき，$\displaystyle s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ と書く．

Ex. $f_n(x) = x^n$, $I = (-1, 1)$ とおく．

① $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$ は I 上で各点収束し，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{x}{1-x}$ である．

② $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は I 上で一様収束しない．

③ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は I 上で広義一様収束する．

関数列に対する性質は，関数項級数に対しても成立する．

Prop.（命題 7.4.2） $A \subset \mathbb{R}$ とし，$\{f_n(x)\}$ を A 上の関数列とする．次の二つは同値である．

① 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ が A 上で（ある関数に）一様収束する．

② $\displaystyle\sup_{x\in A}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \to 0$ $(n \to \infty)$.

Prop.（コーシーの判定法）（定理 7.4.3） $A \subset \mathbb{R}$ とし，$\{f_n(x)\}$ を A 上の関数列とする．次の二つは同値である．

① 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ が A 上で（ある関数に）一様収束する．

② $\displaystyle\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall x \in A, \left(n \geq m \geq N \implies \left|\sum_{k=m}^{n} f_k(x)\right| < \varepsilon\right).$

Th.（定理 7.4.4） $I \subset \mathbb{R}$ を区間とする．もし $\{f_n\} \subset C(I)$ かつ $\displaystyle s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ が I 上で一様収束するならば，$s \in C(I)$ である．

Rem. 上の定理において,「$s(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ が I 上で一様収束する」を,「$s(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ が I 上で広義一様収束する」に変えても結論は成立する.

ここで,関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ が一様収束することを保証する十分条件を述べる.次の定理は今後多くの場面で用いられることになる.

Th.(ワイエルシュトラスの優級数定理(M-test))(定理 7.4.7) $A \subset \mathbb{R}$ とし,$\{f_n(x)\}$ を A 上の関数列とする.もしある数列 $\{M_n\}$ が存在して $\sup_{x\in A} |f_n(x)| \leq M_n\ (\forall n \in \mathbb{N})$ かつ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ が収束するならば,関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は A 上で一様収束する.

Rem. 上の定理における波線部は「$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in A,\ |f_n(x)| \leq M_n$」とも書ける.

Ex. 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ は $\mathbb{R}$ 上で連続である.

関数項級数における「無限和と積分の交換」「無限和と微分の交換」は**「項別積分」「項別微分」**と呼ばれる.具体例についてはレポート問題や演習問題を参照のこと.

Th.(項別積分)(定理 7.4.5) $\{f_n\} \subset C([a,b])$ かつ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ が $[a,b]$ 上で一様収束するならば,$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx$ が成り立つ.

Th.(項別微分)(定理 7.4.6) $\{f_n\} \subset C^1(I)$ であり,$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は I 上で各点収束し,$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ は I 上で一様収束すると仮定する.このとき,$s(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は I 上で広義一様収束し,$s \in C^1(I)$ であり,$s'(x) = \left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)\ (\forall x \in I)$ が成り立つ.

Rem. (i) 上の定理において,「$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は I 上で各点収束し」を,「ある $a \in I$ が存在して,級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)$ が収束し」に変えても結論は成立する.

(ii) 上の定理において,「$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ は I 上で一様収束する」を,「$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ は I 上で広義一様収束する」に変えても結論は成立する.

次に,関数項級数の特別な場合である**べき級数(整級数)**について扱う.べき級数の収束・発散についてはきれいな理論がある.

Def. 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ で，$f_n(x) = a_n(x-c)^n$（ただし $c \in \mathbb{R}$, $a_n \in \mathbb{R}$）の形のものを**べき級数（整級数）**と呼ぶ．即ち，べき級数は

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots$$

という形の関数項級数である．

Ex. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$ はべき級数であり，$\mathbb{R}$ 上で e^x に各点収束する．

Rem. べき級数においては $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}$ ではなく $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}$ となっていることに注意せよ．また，$x-c = X$ とおけば $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ となるから，最初から $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の形のべき級数について考えれば十分である．

べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ に関して，ここでは主に次の二つの問題について考える．

● **べき級数は x がどの範囲にあるときに収束するか？**

● **べき級数の収束は一様収束であるか？ 項別積分・項別微分はできるか？**

まずは，べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が収束する範囲について考える．次に述べる**収束半径**の定義は教科書における定義とは異なることを注意する（その理由は講義で言及する）．

Def. $R = \sup\left\{ |x| \;\middle|\; \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ が収束する} \right\}$ をべき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の**収束半径**と呼ぶ．ただし，右辺にある上限が存在しない場合は $R = \infty$ と定める．

Ex. ① $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ の収束半径は ∞ である．　② $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ の収束半径は 1 である．

Lem.（アーベルの補題）（定理 7.8.1 の一部） $x_0 \neq 0$ とする．

① べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が $x = x_0$ で収束するならば，$|x| < |x_0|$ なるすべての x について $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は収束する．

② べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が $x = x_0$ で発散するならば，$|x| > |x_0|$ なるすべての x について $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は発散する．

この補題を用いると，べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束・発散について次のことが分かる．

Cor. べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束・発散については，次の三つのいずれかが成立する．

① 任意の $x \in \mathbb{R}$ で収束する．（このとき，収束半径は ∞ である）

② $x = 0$ のみで収束し，それ以外の x では発散する．（このとき，収束半径は 0 である）

③ ある $R > 0$ が存在して，$|x| < R$ ならば（絶対）収束し，かつ $|x| > R$ ならば発散する．（このとき，収束半径は R である）

この系により，べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径の特徴付けが与えられたことになる．すると,「収束半径 R はどうやって求められるのか？」「$x = R, x = -R$ でのべき級数の収束・発散はどうなのか？」という疑問が生まれる．まずは前者の疑問に対して，特別な場合に R の値を与える式を述べる．それぞれ，解析学 I で学習した級数に対する**ダランベールの判定法**，**コーシーの判定法**に基づいた表現公式である．

Th. ① $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r$ とする（$r = \infty$ のときも考える）．このとき，べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径 R は $R = \dfrac{1}{r}$ である．（ただし，$r = 0$ のときは $R = \infty$，$r = \infty$ のときは $R = 0$ とする）

② $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r$ とする（$r = \infty$ のときも考える）．このとき，べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径 R は $R = \dfrac{1}{r}$ である．（ただし，$r = 0$ のときは $R = \infty$，$r = \infty$ のときは $R = 0$ とする）

Ex. べき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$ の収束半径は 1 である．

この定理により，もしも極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ や $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ が存在するならば，べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径は求められる．しかし，数列は収束するとは限らない．一般のべき級数に対する収束半径の表現公式として**コーシー・アダマールの定理**があるが，これを述べるためには「数列の**上極限・下極限**」の概念が必要である．数列の上極限・下極限についての説明や例は補足プリント No.1 をご参照いただき，ここでは数列の上極限・下極限の定義と諸性質について述べるにとどめる．

Def. $\{a_n\}$ を数列とする．

① $\{a_n\}$ が上に有界なとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{k\geq n} a_k\right)$ を $\{a_n\}$ の**上極限**といい，$\displaystyle\limsup_{n\to\infty} a_n$ や $\displaystyle\varlimsup_{n\to\infty} a_n$ で表す．ただし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{k\geq n} a_k\right) = -\infty$ のときは $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$ と定める．また，$\{a_n\}$ が上に有界でないときは $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$ と定める．

② $\{a_n\}$ が下に有界なとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} a_k\right)$ を $\{a_n\}$ の**下極限**といい，$\displaystyle\liminf_{n\to\infty} a_n$ や $\displaystyle\varliminf_{n\to\infty} a_n$ で表す．ただし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} a_k\right) = \infty$ のときは $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} a_n = \infty$ と定める．また，$\{a_n\}$ が下に有界でないときは $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$ と定める．

Ex. $a_n = (-1)^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$ とおくと，$\displaystyle\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$ である．

Prop. $\{a_n\}$ が有界列ならば，$\displaystyle\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$ が成り立つ．

Th.（定理 2.2.14） $\{a_n\}$ を有界列，$\alpha \in \mathbb{R}$ とする．このとき，$\displaystyle\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \alpha$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ は同値である．

Rem. 命題「$\displaystyle\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \pm\infty \iff \lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$（複号同順）」も真である．

Th. $\{a_n\}$ を有界列，$\alpha \in \mathbb{R}$ とする．このとき，$\displaystyle\limsup_{n\to\infty} a_n = \alpha$ と次の「①かつ②」が成り立つことは同値である．

① $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geq N \Longrightarrow a_n < \alpha + \varepsilon$.

② 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$a_n > \alpha - \varepsilon$ を満たす $n \in \mathbb{N}$ が無限個存在する．

べき級数の話に戻り，収束半径を与える**コーシー・アダマールの定理**を述べる．

Th.（定理 7.8.6） べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径 R は $\displaystyle\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ を満たす．ただし，右辺が 0 のときは $R = \infty$，右辺が ∞ のときは $R = 0$ とみなす．

次に,「R をべき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径とするとき，$x = R, x = -R$ でのべき級数の収束・発散はどうなのか？」という問題は後回しにして，先にべき級数の一様収束性，項別積分・項別微分について考える．結論を先に述べると，**「べき級数は収束半径内で広義一様収束する」「べき級数は収束半径内で項別積分・項別微分が可能である」**となる．

Th. べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を R とすると，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は $(-R, R)$ 上で広義一様収束する.（$R = \infty$ のときは，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は $\mathbb{R}$ 上で広義一様収束する）

Th.（項別積分）（定理 7.8.9） $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を $R\,(\neq 0)$ とする．このとき，

$$\int_0^x f(t)\,dt \left(= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\,dt\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad \big(\forall x \in (-R, R)\big)$$

が成り立つ．また，右辺のべき級数の収束半径も R である．

<u>**Th.（項別微分）（定理 7.8.9）**</u> $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ の収束半径を $R\,(\neq 0)$ とする． このとき，$f\in C^1\big((-R,R)\big)$ であり，$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ $\big(\forall x\in(-R,R)\big)$ が成り立つ．また，右辺のべき級数の収束半径も R である．

<u>**Rem.**</u> 結局，べき級数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ の収束半径を $R\,(\neq 0)$ とすると，$f\in C^{\infty}\big((-R,R)\big)$ であることが分かる．

<u>**Cor.（定理 7.8.9）**</u> $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ の収束半径が 0 でなければ，$a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ である．

即ち，べき級数はその和のテイラー級数展開と一致する．

最後に，R をべき級数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ の収束半径とするとき，$x=R,\,x=-R$ でのべき級数の収束・発散について考えよう．三つのべき級数 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\ \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n},\ \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$ を考えると，収束半径はどれも 1 であるが，$x=\pm 1$ での収束・発散の状況は異なる．この例のように，一般には $x=\pm R$ での収束するか発散するかについては分からないのであるが，もし $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ が $x=R$ (or $x=-R$) で収束するならば，級数の和 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n\left(\text{or }\sum_{n=0}^{\infty}a_n(-R)^n\right)$ について次のことが分かる．

<u>**Th.（アーベルの定理）（定理 7.7.4）**</u> $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ の収束半径を $R\,\big(\in(0,\infty)\big)$ とする． もし $\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ が収束するならば，$f(x)$ は $(-R,R]$ 上で連続である．特に，

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n=f(R)=\lim_{x\to R-0}f(x)=\lim_{x\to R-0}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

が成り立つ． $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(-R)^n$ が収束する場合も同様の主張が成り立つ．

<u>**Ex.**</u> p.8 にある例で見たように，$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$ の収束半径は 1 である．アーベルの定理を用いると

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\log 2$$

であることが分かる．

上の例に関する詳しい議論は講義をご参照いただき，学生の皆さんにはレポート問題・演習問題を解くことにより練習を積むことを望む．

３．多変数関数の極限と連続性

「関数」については中学で初めて登場し，さまざまな関数を学習してきた．これまで学習してきた関数は実数 x に対して実数 y を対応させる $y = f(x)$ の形の 1 変数関数であったが，ここでは二つの実数 x, y に対して実数 z を対応させる $z = f(x, y)$ の形の 2 変数関数（さらに，一般に n 変数関数）を扱う．1 変数関数の性質を調べるために，連続性や微分・積分が有効であったが，今後多変数関数の連続性や微分・積分を学習するに当たって，1 変数の場合とどこが似ていて，どこが異なっているかを意識して欲しい．

関数を可視化する方法の一つがグラフであるが，多変数関数のグラフを描くことは一般に難しい．最近ではコンピュータを用いて容易にグラフを描くことができるようになっているが，どうしてそのようなグラフになるか納得することは重要である．そして，**代表的な関数については，どのようなグラフになるかを是非とも知っていて欲しい**．例えば，$z = ax + by + c$ のように x, y の一次関数を用いて表せる関数のグラフは平面であり，逆に点 (x_0, y_0, z_0) を通り (α, β, γ) を法線ベクトルとする平面の方程式は $\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0$ と 1 次式を用いて書き表すことができる．

一般に，n 変数関数は $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ と表すことができる．変数を $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ と 1 文字で表す（本講義では原則として太文字で表す）こともある．関数 $f(\boldsymbol{x})$ の定義域 A は $\mathbb{R}^n$ の部分集合である．

多変数関数について学習する前に，まずは $\mathbb{R}^n$ の位相的性質について学ぶ必要がある．多くは数学通論 I で学んだことと思うが，数学通論 I では学ばなかった知識（数学通論 II で学ぶであろう知識）も必要となる．詳しくは補足プリント No.2 に記載しているので各自学習に励んでいただくことにして，ここでは定義・性質の一部を述べるにとどめる．

Def./Prop. $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ と定め，$|\boldsymbol{x}|$ を $\boldsymbol{x}$ の長さまたは**ユークリッドノルム**と呼ぶ．また，2 点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$ と定めると，写像 $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は距離の公理を満たす．距離 $d(\cdot, \cdot)$ を**ユークリッド距離**と呼ぶ．

以下，$\mathbb{R}^n$ の距離はユークリッド距離のみを考える．

Def. $\mathbb{R}^n$ の点列 $\left\{\boldsymbol{x}^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ が $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ に**収束**する

$$\overset{\text{def}}{\iff} \lim_{k\to\infty} d\bigl(\boldsymbol{x}^{(k)}, \boldsymbol{a}\bigr) = 0 \ \bigl(\text{i.e., } \forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } k \geq N \implies d\bigl(\boldsymbol{x}^{(k)}, \boldsymbol{a}\bigr) < \varepsilon\bigr)$$

これを $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{a}$ や $\boldsymbol{x}^{(k)} \to \boldsymbol{a}\ (k \to \infty)$ などと書き，$\boldsymbol{a}$ を点列 $\left\{\boldsymbol{x}^{(k)}\right\}$ の**極限（点）**と呼ぶ．

点列 $\left\{\boldsymbol{x}^{(k)}\right\}$ がコーシー列であることも，数列のときと同様に定義される．

Prop. $\left\{\boldsymbol{x}^{(k)} = \bigl(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\bigr)\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ と $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{a}$ と $\lim_{k\to\infty} x_j^{(k)} = a_j\ \bigl(\forall j \in \{1, \ldots, n\}\bigr)$ は同値である．

Th.（定理 5.1.1，定理 5.1.2）

①**（ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理）** $\mathbb{R}^n$ 内の有界な点列 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ は必ず収束する部分列 $\{\boldsymbol{x}^{(k_i)}\}_{i=1}^{\infty}$ を含む.

②**（$\mathbb{R}^n$ の完備性）** 任意の $\mathbb{R}^n$ のコーシー列は収束する.

Th. $A \subset \mathbb{R}^n$ とするとき，次の二つは同値である.

① A は有界閉集合である.

②**（点列コンパクト性）** A の点からなる任意の点列 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ は，A の点に収束する部分列 $\{\boldsymbol{x}^{(k_i)}\}_{i=1}^{\infty}$ を必ず含む.

Def. $A \subset \mathbb{R}^n$ とする.

① A が連結な開集合であるとき，A は**領域**であると呼ぶ.

② ある領域 $B \subset \mathbb{R}^n$ が存在して $A = \overline{B}$ と書けるとき，A は**閉領域**であると呼ぶ.

Rem. $A \subset \mathbb{R}^n$ が開集合であるならば，A が連結であることと A が弧状連結であることは同値である．従って，A が領域であることの定義を「A が弧状連結な開集合である」としても良い.

多変数関数 $f(\boldsymbol{x})$ の極限と連続性について，定義と基本的な性質を述べよう.

Def. $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}_0 \in \overline{A}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ とする.

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = \alpha$$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \text{「}\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \boldsymbol{x} \in A \text{ かつ } 0 < d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) < \delta \Longrightarrow |f(\boldsymbol{x}) - \alpha| < \varepsilon\text{」}$$

$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = \infty$ などの定義も同様であるので，定義を書くことは各自に任せる．多変数関数の極限の定義において「$0 <$」が必要であることは 1 変数関数の極限のときと同じである．また，極限を取る点 $\boldsymbol{x}_0$ は $f(\boldsymbol{x})$ の定義域 A に属する必要はないことにも注意する．なお，2 変数関数の場合，極限の定義は

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = \alpha$$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \text{「}\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } (x, y) \in A \text{ かつ } 0 < d\big((x, y), (a, b)\big) < \delta \Longrightarrow |f(x, y) - \alpha| < \varepsilon\text{」}$$

となる.

Ex. $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ を $f(x, y) = \dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$ と定めると，$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 0$ である.

Prop. $A \subset \mathbb{R}^n$, $f, g : A \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}_0 \in \overline{A}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とする．$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = \alpha$, $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} g(\boldsymbol{x}) = \beta$ ならば，$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} \big(f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})\big) = \alpha + \beta$ である.

（関数の差，スカラー倍，積，商の極限についても同様である）

Prop.（定理 5.2.1）[2] $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}_0 \in \overline{A}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ とする．次の二つは同値である．

① $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = \alpha$.

② $\boldsymbol{x}_0$ に収束する任意の A の点からなる点列 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$（ただし，$\boldsymbol{x}^{(k)} \neq \boldsymbol{x}_0$ $(\forall k \in \mathbb{N})$）に対して，$\displaystyle\lim_{k \to \infty} f\bigl(\boldsymbol{x}^{(k)}\bigr) = \alpha$ が成り立つ．

Rem. 次の例で見るように，実用的には ① $\Longrightarrow$ ③ を用いることも多い．

③ $C : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ $\bigl(t \in [0,1]\bigr)$ が A 内の連続曲線であり，かつ $\boldsymbol{\varphi}(1) = \boldsymbol{x}_0$（ただし，$\boldsymbol{\varphi}(t) \neq \boldsymbol{x}_0$ $\bigl(\forall t \in [0,1)\bigr)$）を満たすならば，$\displaystyle\lim_{t \to 1-0} f\bigl(\boldsymbol{\varphi}(t)\bigr) = \alpha$ が成り立つ．

Ex. $f : \mathbb{R}^2 \setminus \bigl\{(0,0)\bigr\} \to \mathbb{R}$ を $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + 2y^2}$ と定めると，

$y = x$ に沿って (x,y) を $(0,0)$ に近づけると $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x,x) = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot x}{x^2 + 2x^2} = \frac{1}{3}$,

$y = -x$ に沿って (x,y) を $(0,0)$ に近づけると $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x,-x) = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot (-x)}{x^2 + 2(-x)^2} = -\frac{1}{3}$

であるから，$\displaystyle\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$ は存在しない．

Rem. 多変数関数に対する**はさみうちの原理**や**コーシーの判定法**も，1 変数関数のときと同様である．しかし，1 変数関数のときと違って「$\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x} \to \infty} f(\boldsymbol{x})$」は考えられない．ただし，$\displaystyle\lim_{|\boldsymbol{x}| \to \infty} f(\boldsymbol{x}) = \alpha$ であれば，「$\forall \varepsilon > 0,\ \exists R > 0$ s.t. $|\boldsymbol{x}| > R \Longrightarrow |f(\boldsymbol{x}) - \alpha| < \varepsilon$」として定義される．

Prop. ① $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y) = \alpha$ かつ $y = b$ の近傍で $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x,y)$ が存在するならば，$\displaystyle\lim_{y \to b} \Bigl(\lim_{x \to a} f(x,y)\Bigr)$ が存在してその値は α に等しい．

② $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y) = \alpha$ かつ $x = a$ の近傍で $\displaystyle\lim_{y \to b} f(x,y)$ が存在するならば，$\displaystyle\lim_{x \to a} \Bigl(\lim_{y \to b} f(x,y)\Bigr)$ が存在してその値は α に等しい．

Def. $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}_0 \in A$ とする．

① $f(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ で**連続**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 「$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ s.t. $\boldsymbol{x} \in A$ かつ $d\bigl(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0\bigr) < \delta \Longrightarrow |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)| < \varepsilon$」

（$\displaystyle\Longleftrightarrow \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0)$）

② $f(\boldsymbol{x})$ が A 上で**連続**（$f \in C(A)$ と書く）

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $\boldsymbol{x}_0 \in A$ に対して，$f(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ で連続である

$\Longleftrightarrow$ 「$\forall \boldsymbol{x}_0 \in A,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ s.t. $\boldsymbol{x} \in A$ かつ $d\bigl(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0\bigr) < \delta \Longrightarrow |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)| < \varepsilon$」

③ $f(\boldsymbol{x})$ が A 上で**一様連続**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 「$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ s.t. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$ かつ $d\bigl(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\bigr) < \delta \Longrightarrow |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| < \varepsilon$」

多変数関数の連続性の定義において「$0 <$」が不要であることや，$\boldsymbol{x} \in A$ が要求されていることは 1 変数関数の連続性のときと同じである．

[2] 教科書の記述には誤りがあるので注意してください．

Ex. $f(x,y)=x$, $g(x,y)=y$, $h(x,y)\equiv 1$ とおくと，$f,g,h\in C\bigl(\mathbb{R}^2\bigr)$ である．従って，2 変数多項式関数は $\mathbb{R}^2$ 上で連続である（n 変数にしても同様である）．

Prop. ① $V\subset\mathbb{R}^2$ を (a,b) の近傍とし，$f:V\to\mathbb{R}$ が (a,b) で連続であると仮定する．このとき，$g(x)=f(x,b)$ で定義される関数 $g(x)$ は $x=a$ で連続であり，かつ $h(y)=f(a,y)$ で定義される関数 $h(y)$ は $y=b$ で連続である．

② $x=\varphi(t)$, $y=\varphi(t)$ はともに $t=t_0$ で連続であり，$f(x,y)$ は $(x,y)=\bigl(\varphi(t_0),\psi(t_0)\bigr)$ で連続であると仮定する．このとき，$g(t)=f\bigl(\varphi(t),\psi(t)\bigr)$ で定義される関数 $g(t)$ は $t=t_0$ で連続である．

③ $u=\varphi(x,y)$, $v=\varphi(x,y)$ はともに $(x,y)=(a,b)$ で連続であり，$f(u,v)$ は $(u,v)=\bigl(\varphi(a,b),\psi(a,b)\bigr)$ で連続であると仮定する．このとき，$g(x,y)=f\bigl(\varphi(x,y),\psi(x,y)\bigr)$ で定義される関数 $g(x,y)$ は $(x,y)=(a,b)$ で連続である．

上の命題は 2 変数関数の場合について述べられているが，一般に n 変数関数に対しても同様の主張が成立する．

Th.（定理 5.2.2） $K\subset\mathbb{R}^n$ を有界閉集合，$f\in C(K)$ とする．このとき，$f(\boldsymbol{x})$ は K 上で最大値・最小値をもつ．

Th.（定理 5.2.3） $K\subset\mathbb{R}^n$ を有界閉集合，$f\in C(K)$ とする．このとき，$f(\boldsymbol{x})$ は K 上で一様連続である．

Th.（中間値の定理）（定理 5.2.4） $A\subset\mathbb{R}^n$ を弧状連結な集合，$f\in C(K)$，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in A$ とする．このとき，もし $f(\boldsymbol{a})\neq f(\boldsymbol{b})$ ならば，$f(\boldsymbol{a})$ と $f(\boldsymbol{b})$ の間にある任意の $\mu\in\mathbb{R}$ に対して，ある $\boldsymbol{c}\in A$ が存在して $\mu=f(\boldsymbol{c})$ となる．

４．偏微分と全微分

この節では $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を空でない開集合とし，2 変数関数 $f = f(x, y) : \Omega \to \mathbb{R}$ の微分について考えるが，空でない開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ と n 変数関数 $f = f(x_1, \ldots, x_n) : \Omega \to \mathbb{R}$ に対しても同様である．また，$(x_0, y_0) \in \Omega$ とする（このとき，(x_0, y_0) は Ω の内点である）．

__Def.__ ① $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$ が存在するとき，$f(x, y)$ は点 (x_0, y_0) で **$\boldsymbol{x}$ に関して偏微分可能**であるといい，この極限値（**偏微（分）係数**）を $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ や $f_x(x_0, y_0)$ などと書く．

__Rem.__ $f(x, y)$ の点 (x_0, y_0) での x に関する偏微分係数を，$f'(x_0, y_0)$, $\dfrac{df}{dx}(x_0, y_0)$, $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0)$ と書いてはいけない．

② $\displaystyle\lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$ が存在するとき，$f(x, y)$ は点 (x_0, y_0) で **$\boldsymbol{y}$ に関して偏微分可能**であるといい，この極限値（偏微分係数）を $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ や $f_y(x_0, y_0)$ などと書く．

③ $f(x, y)$ が Ω 上で x (y) に関して偏微分可能である

$\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の $(x_0, y_0) \in \Omega$ に対して，$f(x, y)$ は点 (x_0, y_0) で x (y) に関して偏微分可能である．

__Rem.__ 上の ③ において，関数 $(x, y) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)$ を，$f(x, y)$ の x (y) に関する偏導関数と呼ぶ．

__Rem.__ 単に「$f(x, y)$ が (x_0, y_0) で（Ω 上で）偏微分可能である」というのは，$f(x, y)$ が (x_0, y_0) で（Ω 上で）x に関しても y に関しても偏微分可能であることをいう．

__Ex.__ $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + 2y^2} & \big((x, y) \neq (0, 0)\big) \\ 0 & \big((x, y) = (0, 0)\big) \end{cases}$ は $(0, 0)$ で偏微分可能である．

__Rem.__ 1 変数関数では「微分可能 $\Longrightarrow$ 連続」であった．しかし，直上の例と p.13 の例で述べた事実をあわせると，多変数関数では「偏微分可能 $\Longrightarrow$ 連続」は**一般には成り立たない**ことが分かる．

__Def.__ 関数 $f(x, y)$ に対して，

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = f_{xx}(x, y), \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = f_{xy}(x, y),$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = f_{yx}(x, y), \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = f_{yy}(x, y)$$

を **2 階（2 次）偏導関数**と呼ぶ．k 階偏導関数も同様に定義される．

__Def.__ ① $m \in \mathbb{N}$ に対して，$f(x, y)$ が Ω 上で **$\boldsymbol{C^m}$ 級**

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $f(x, y)$ の m 階までの偏導関数が全て存在し，それらが Ω 上で連続である

② $f(x, y)$ が Ω 上で **$\boldsymbol{C^\infty}$ 級** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して，$f(x, y)$ は Ω 上で C^m 級である

③ $C^m(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f(x, y)$ は Ω 上で C^m 級である$\}$（$C^\infty(\Omega)$ も同様に定義）

Rem. 一般には $f_{xy}(x,y)$ と $f_{yx}(x,y)$ は等しいとは限らない．

Ex.（例 5.3.4） $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \big((x,y)\neq(0,0)\big) \\ 0 & \big((x,y)=(0,0)\big)\end{cases}$ とおくと，$f_{xy}(0,0)=-1$, $f_{yx}(0,0)=1$ である．

しかしながら，$f(x,y)$ が Ω 上で C^2 級であれば，Ω 上で $f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$ が成立する．

Th.（定理 5.3.2） $f\in C^2(\Omega)$ ならば，$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$ $\big(\forall(x,y)\in\Omega\big)$ である．

Def. $f(x,y)$ が (x_0,y_0) で**全微分可能**である
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists A,B\in\mathbb{R}$, $\exists g(h,k)$：$(0,0)$ の近傍で定義された関数[3]
s.t. $f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+Ah+Bk+g(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$ かつ $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}g(h,k)=0$

$$\left(\Longleftrightarrow \exists A,B\in\mathbb{R}\ \text{s.t.}\ f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+Ah+Bk+o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)\ \big((h,k)\to(0,0)\big)\right)$$

解析学 I で学んだように，1 変数関数では「$f(x)$ が $x=x_0$ で微分可能であること（即ち，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ が存在すること」と「$f(x)$ が $x=x_0$ の近くで 1 次関数で近似できること（$y=f(x)$ の点 $\big(x_0,f(x_0)\big)$ における接線が存在すること）」が同値であった．上で定義した $f(x,y)$ が (x_0,y_0) で全微分可能であることは，$f(x,y)$ が (x_0,y_0) の近くで 1 次関数で近似できることを表している．即ち，**多変数関数における全微分可能という概念は，1 変数関数における微分可能という概念に相当する**．$f(x,y)$ が (x_0,y_0) において全微分可能であるとき，$z=f(x_0,y_0)+A(x-x_0)+B(y-y_0)$ のこと（ただし，A,B は全微分可能であることの定義に現れる実数）を，$z=f(x,y)$ の点 $\big(x_0,y_0,f(x_0,y_0)\big)$ における**接平面**と呼ぶ．

Prop. $f(x,y)$ が (x_0,y_0) で全微分可能であるならば，次が成立する．

① $f(x,y)$ は (x_0,y_0) で偏微分可能である．

② 全微分可能であることの定義に現れる A,B は $A=f_x(x_0,y_0)$, $B=f_y(x_0,y_0)$ を満たす．

Rem. $f(x,y)$ が (x_0,y_0) で偏微分可能であっても，$f(x,y)$ は (x_0,y_0) で全微分可能であるとは限らない．

Prop. $f(x,y)$ が (x_0,y_0) で全微分可能であるならば，$f(x,y)$ は (x_0,y_0) で連続である．

Th.（定理 5.4.1） $f(x,y)$ が Ω 上で C^1 級であるならば，$f(x,y)$ は Ω 上で全微分可能である．

多変数関数における連続性，偏微分可能性，全微分可能性および C^1 級であることの相互関係について，しっかりと理解を深めておいていただきたい．

[3]実際には，$g(h,k)$ は $(0,0)$ 自身では定義されていなくても構いません．

次に述べる二つの定理は，1 変数関数における合成関数の微分に相当する多変数関数の**連鎖律 (chain rule)** である．講義における例やレポート問題および演習問題を通じて，正しい記法で正確に運用できるように練習を積んでいただきたい．

Th.（連鎖律，その 1）（定理 5.5.1） $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ が $t=t_0$ で微分可能，$z=f(x,y)$ が $(x,y)=\bigl(\varphi(t_0),\psi(t_0)\bigr)$ で全微分可能であると仮定する．このとき，$g(t)=f\bigl(\varphi(t),\psi(t)\bigr)$ とおくと，$g(t)$ は $t=t_0$ で微分可能であり，

$$\frac{dg}{dt}(t_0)=\frac{\partial f}{\partial x}\bigl(\varphi(t_0),\psi(t_0)\bigr)\frac{d\varphi}{dt}(t_0)+\frac{\partial f}{\partial y}\bigl(\varphi(t_0),\psi(t_0)\bigr)\frac{d\psi}{dt}(t_0)$$

を満たす．

Rem. 教科書の**定理 5.5.1** の結論の式の左辺は誤りである．記法にはくれぐれも注意していただきたい．ただし，次に記述する命題であれば正しい記法になっている．

> $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ が区間 I で微分可能，$z=f(x,y)$ が開集合 Ω 上で全微分可能であり，かつ $t\in I$ ならば $\bigl(\varphi(t),\psi(t)\bigr)\in\Omega$ であると仮定する．このとき，$g(t)=f\bigl(\varphi(t),\psi(t)\bigr)$ とおくと，$g(t)$ は I 上で微分可能であり，
>
> $$\frac{d}{dt}f\bigl(\varphi(t),\psi(t)\bigr)=\frac{\partial f}{\partial x}\bigl(\varphi(t),\psi(t)\bigr)\frac{d\varphi}{dt}(t)+\frac{\partial f}{\partial y}\bigl(\varphi(t),\psi(t)\bigr)\frac{d\psi}{dt}(t)\quad(t\in I)$$
>
> を満たす．

Th.（連鎖律，その 2）（定理 5.5.3） $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$ が $(u,v)=(u_0,v_0)$ で偏微分可能，$z=f(x,y)$ が $(x,y)=\bigl(\varphi(u_0,v_0),\psi(u_0,v_0)\bigr)$ で全微分可能であると仮定する．このとき，$g(u,v)=f\bigl(\varphi(u,v),\psi(u,v)\bigr)$ とおくと，$g(u,v)$ は $(u,v)=(u_0,v_0)$ で偏微分可能であり，

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial u}(u_0,v_0)&=\frac{\partial f}{\partial x}\bigl(\varphi(u_0,v_0),\psi(u_0,v_0)\bigr)\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0,v_0)+\frac{\partial f}{\partial y}\bigl(\varphi(u_0,v_0),\psi(u_0,v_0)\bigr)\frac{\partial\psi}{\partial u}(u_0,v_0),\\ \frac{\partial g}{\partial v}(u_0,v_0)&=\frac{\partial f}{\partial x}\bigl(\varphi(u_0,v_0),\psi(u_0,v_0)\bigr)\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0,v_0)+\frac{\partial f}{\partial y}\bigl(\varphi(u_0,v_0),\psi(u_0,v_0)\bigr)\frac{\partial\psi}{\partial v}(u_0,v_0)\end{aligned}$$

を満たす．

今節の最後に多変数関数のテイラーの定理について述べる．1 変数関数のときと同様に，テイラーの定理は（ある点の近傍で）関数を多項式で近似できることを表している．

Th.（定理 5.5.8） $n\in\mathbb{N}$ とする．$f\in C^n(\Omega)$ であり，(x_0,y_0) と (x_0+h,y_0+k) を結ぶ線分が Ω に含まれていると仮定する．このとき，

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j!}\left(\sum_{r=0}^{j}{}_jC_r\frac{\partial^j f}{\partial x^{j-r}\partial y^r}(x_0,y_0)h^{j-r}k^r\right)+R_n(h,k),$$

$$R_n(h,k)=\frac{1}{n!}\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-r}\partial y^r}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)h^{n-r}k^r\quad\bigl(\exists\theta\in(0,1)\bigr)$$

が成り立つ．

Rem. 上の定理において，$f(x_0+h, y_0+k)$ の展開式の最初の数項を書くと次のようになる：

$$
\begin{aligned}
&f(x_0+h, y_0+k)\\
&= f(x_0,y_0) + \bigl(f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k\bigr)\\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2!}\bigl(f_{xx}(x_0,y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)hk + f_{yy}(x_0,y_0)k^2\bigr)\\
&\qquad\qquad + \frac{1}{3!}\bigl(f_{xxx}(x_0,y_0)h^3 + 3f_{xxy}(x_0,y_0)h^2k + 3f_{xyy}(x_0,y_0)hk^2 + f_{yyy}(x_0,y_0)k^3\bigr)\\
&\qquad\qquad + \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Def. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ が**凸集合**
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \Omega$, $\forall t \in [0,1]$, $(1-t)\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v} \in \Omega$

Rem. 多変数関数のテイラーの定理における波線部の仮定は，例えば Ω が凸集合であれば満たされる．

多変数関数のテイラーの定理は，次に述べる補題と 1 変数関数のテイラーの定理を組み合わせることで証明される．

Lem. 多変数関数のテイラーの定理の仮定が満たされていると仮定する．このとき，$g(t) = f(x_0+th, y_0+tk)$ $\bigl(t \in [0,1]\bigr)$ とおくと，$g \in C^n\bigl([0,1]\bigr)$ であり，

$$
g^{(n)}(t) = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-r}\partial y^r}(x_0+th, y_0+tk)h^{n-r}k^r \quad \bigl(t \in [0,1]\bigr)
$$

が成り立つ．

Rem. 多変数関数のテイラーの定理の結論の式を次のように書くこともある：

$$
\begin{aligned}
f(x_0+h, y_0+k) &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!}\left[\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f\right](x_0,y_0)\\
&\qquad + \frac{1}{n!}\left[\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f\right](x_0+\theta h, y_0+\theta k) \quad \bigl(\exists\theta \in (0,1)\bigr)
\end{aligned}
$$

Rem. 多変数関数のテイラーの定理において，$n=1$ のときは

$$
f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) \quad \bigl(\exists\theta \in (0,1)\bigr)
$$

となり，これは平均値の定理の多変数関数版である．

Rem. もし $f \in C^\infty(\Omega)$ で，多変数関数のテイラーの定理における $R_n(h,k)$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_n(h,k) = 0$ を満たすならば，

$$
f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{r=0}^{n} {}_nC_r \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-r}\partial y^r}(x_0,y_0)h^{n-r}k^r\right)
$$

を得る．これを $f(x,y)$ の (x_0,y_0) における**テイラー級数展開**と呼ぶ．

５．陰関数定理と逆写像定理

二つの変数 x と y の関係が，$y=\varphi(x)$ の形で表されるものを関数と呼んだ．一方，高校では $x^2+y^2-1=0$ のように x と y の関係式で表されるものも学んだ（$x^2+y^2=1$ は座標平面における原点を中心とする半径 1 の円を表すのであった）．一般に，2 変数関数 $f(x,y)$ を用いて $f(x,y)=0$ で表されるものを**陰関数**と呼ぶ.

それでは，$f(x,y)=0$ を $y=\varphi(x)$ と表すことはいつでもできるであろうか？ 上に挙げた $f(x,y)=x^2+y^2-1=0$ は実際に y について解くことができ，$y=\sqrt{1-x^2}$ または $y=-\sqrt{1-x^2}$ $(-1\le x\le 1)$ と表せる．つまり，$x\in(-1,1)$ ならば y は二つ存在してしまい,「関数」にはならない．しかし，$f(x,y)=x^2+y^2-1=0$ 上の点の十分に小さい近傍を考えれば，2 点 $(\pm1,0)$ を除いて $f(x,y)=0$ は $y=\varphi(x)$ の形に表すことができる[4].

今節で学ぶ内容を平たく言えば，陰関数 $f(x,y)=0$ を局所的に $y=\varphi(x)$ の形に表せることを保証する定理である**陰関数定理**と，$y=\varphi(x)$ を局所的に $x=\psi(y)$ の形に表せることを保証する定理（の多変数関数版）である**逆写像定理**である．まずは，陰関数定理（の最も単純な場合）を述べよう.

Th.（陰関数定理）（定理 9.1.3） $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ を空でない開集合，$f=f(x,y)\in C^1(\Omega)$ とし，$(x_0,y_0)\in\Omega$ が $f(x_0,y_0)=0$, $f_y(x_0,y_0)\neq 0$ を満たすと仮定する．このとき，ある $\delta,\rho>0$ が存在して次を満たす.

① $[x_0-\delta,x_0+\delta]\times[y_0-\rho,y_0+\rho]\subset\Omega$ が成り立つ.

② 任意の $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ に対して，ある $y\in(y_0-\rho,y_0+\rho)$ がただ一つ存在して $f(x,y)=0$ を満たす．以下，この y を $\varphi(x)$ と書く.

（即ち，$(x,y)\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\times(y_0-\rho,y_0+\rho)$ のとき，$f(x,y)=0\iff y=\varphi(x)$ である）

③ $y_0=\varphi(x_0)$ が成り立つ.

④ $\varphi(x)$ は $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上で C^1 級であり，$\varphi'(x)=-\dfrac{f_x\big(x,\varphi(x)\big)}{f_y\big(x,\varphi(x)\big)}$ が成り立つ.

⑤ さらに，$\ell\in\mathbb{N}$ に対して，もし $f\in C^\ell(\Omega)$ ならば，$\varphi\in C^\ell\big((x_0-\delta,x_0+\delta)\big)$ である.

Ex. $f(x,y)=x^3+y^3-3xy-3=0$ 上の点 $(2,1)$ の十分小さい近傍上で，$f(x,y)=0$ は（$x=2$ の近傍上で）C^1 級関数 $\varphi(x)$ を用いて $y=\varphi(x)$ と表せる.

Rem. 上の定理のステートメントの ④ にある式は，$f\big(x,\varphi(x)\big)=0$ を x について微分した式 $f_x\big(x,\varphi(x)\big)+f_y\big(x,\varphi(x)\big)\varphi'(x)=0$ から得られる（従って，$\varphi'(x)=\cdots$ の式を忘れたとしても自分で導くことができる）.

Rem. 同様にして，$(x_0,y_0)\in\Omega$, $f=f(x,y)\in C^1(\Omega)$, $f(x_0,y_0)=0$, $f_x(x_0,y_0)\neq 0$ ならば，$f(x,y)=0$ は (x_0,y_0) の近傍で $x=\psi(y)$ と表せることができ，$\psi(y_0)=x_0$ かつ $\psi(y)$ は $y=y_0$ の近傍で C^1 級関数であることも成り立つ.

[4]点 $(1,0)$ や $(-1,0)$ の十分小さい近傍では，$y=\varphi(x)$ の形に表すことはできませんが，$x=\psi(y)$ の形に表すことはできます.

Rem. 変数が増えた場合の陰関数定理も同様に証明できる．例えば,

(i) $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$, $f = f(x, y, z) \in C^1(\Omega)$, $f(x_0, y_0, z_0) = 0$, $f_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ ならば, $f(x, y, z) = 0$ は (x_0, y_0, z_0) の近傍で $z = \varphi(x, y)$ と表せることができ，$\varphi(x_0, y_0) = z_0$ かつ $\varphi(x, y)$ は (x_0, y_0) の近傍で C^1 級関数である．

(ii) $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$, $f = f(x, y, z), g = g(x, y, z) \in C^1(\Omega)$, $f(x_0, y_0, z_0) = g(x_0, y_0, z_0) = 0$, $\det \begin{pmatrix} f_y(x_0, y_0, z_0) & f_z(x_0, y_0, z_0) \\ g_y(x_0, y_0, z_0) & g_z(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix} \neq 0$ ならば, $\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$ は (x_0, y_0, z_0) の近傍で $\begin{cases} y = \varphi(x) \\ z = \psi(x) \end{cases}$ と表すことができ，$\big(\varphi(x_0), \psi(x_0)\big) = (y_0, z_0)$ かつ $\varphi(x)$, $\psi(x)$ は $x = x_0$ の近傍で C^1 級である．

問 上の (i) で，$\varphi_x(x_0, y_0)$ と $\varphi_y(x_0, y_0)$ を，$f(x, y, z)$ の偏微分係数を用いて表せ．

陰関数定理の応用を一つ述べよう．

Def. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を開集合，$(x_0, y_0) \in \Omega$, $f = f(x, y) \in C^1(\Omega)$ とする．

① ベクトル $\big(f_x(x, y), f_y(x, y)\big)$ を $f(x, y)$ の**勾配ベクトル**と呼び，$\operatorname{grad} f(x, y)$, $\nabla f(x, y)$, $Df(x, y)$ などと書く．

② (x_0, y_0) が $f(x, y) = 0$ の**正則点** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $f(x_0, y_0) = 0$ かつ $\operatorname{grad} f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$

③ (x_0, y_0) が $f(x, y) = 0$ の**特異点** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $f(x_0, y_0) = 0$ かつ $\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = (0, 0)$

上記の状況で，もし (x_0, y_0) が $f(x, y) = 0$ の正則点であれば，$f_x(x_0, y_0)$ と $f_y(x_0, y_0)$ の少なくとも一方は 0 ではない．$f_x(x_0, y_0) \neq 0$ ならば陰関数定理により $f(x, y) = 0$ は (x_0, y_0) の近傍で $y = \varphi(x)$ の形に表すことができ，$f_y(x_0, y_0) \neq 0$ ならば再び陰関数定理により $f(x, y) = 0$ は (x_0, y_0) の近傍で $x = \psi(y)$ の形に表すことができる．即ち，$f(x, y) = 0$ は (x_0, y_0) の近傍で C^1 級曲線であることが分かる．

問 $f(x, y) = 0$ の正則点 (x_0, y_0) における接線の方程式を求めよ．

一方，(x_0, y_0) が $f(x, y) = 0$ の特異点である場合は，$f(x, y) = 0$ が (x_0, y_0) の近傍でどのようであるかは分からない[5]．最後に，逆写像定理（の最も単純な場合）を述べよう．

Th.（定理 9.1.11, $n = 2$） $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ が空でない開集合，$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2) \in \Omega$, $\boldsymbol{f}(x, y) = \big(f_1(x, y), f_2(x, y)\big)$ が Ω 上で C^1 級であるとする．もし，$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(a_1, a_2) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(a_1, a_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a_1, a_2) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(a_1, a_2) \end{pmatrix} \neq 0$ ならば，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \big(f_1(a_1, a_2), f_2(a_1, a_2)\big)$ の近傍で $\boldsymbol{f}$ の逆写像 $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{f}^{-1}$ が存在する．

上の定理は「2 変数版」であるが,「n 変数版」も同様である．

Ex. $\boldsymbol{f}(x, y, z) = \big(x + y + z, xy + yz + zx, xyz\big)$ とおくと，$\boldsymbol{f}(1, 2, 3) = (6, 11, 6)$ である．点 $(6, 11, 6)$ の近傍で定義された $\boldsymbol{f}$ の逆写像 $\boldsymbol{\varphi}$ で，$\boldsymbol{\varphi}(6, 11, 6) = (1, 2, 3)$ を満たすものは存在するか？

陰関数定理・逆写像定理の一般形に関しては補足プリント No.3 をご参照いただき，学生の皆さんにはレポート問題・演習問題を解くことにより練習を積むことを望む．

[5]何も言えないと困るのですが，逆にそれだからこそ（数学的には）面白いとも言えます．