解析学 III　補足プリント No.2　　（2025.6.25 配布）

プリントは https://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R7Kai3.html にも置いてあります。

● $\mathbb{R}^n$ の距離と位相的性質

以下，$n \in \mathbb{N}$ とし，n 個の実数の組 $(x_1, \dots, x_n)$ 全体からなる集合を $\mathbb{R}^n$ と定めます．$\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，和とスカラー倍を

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \qquad \alpha\boldsymbol{x} = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$$

と定義すると，$\mathbb{R}^n$ は実線形空間をなします．以下，$\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ と表すことにします[1]．

Def. 1（$\mathbb{R}^n$ のノルム） $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

と定め，$|\boldsymbol{x}|$ を $\boldsymbol{x}$ の**長さ**または**ノルム**と呼ぶ[2]．

Lem. 1 $\mathbb{R}^n$ の元に対しそのノルムを取る写像 $|\cdot| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は次の性質を満たす[3]．

(i) 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $|\boldsymbol{x}| \geq 0$ であり，かつ $|\boldsymbol{x}| = 0 \iff \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ が成り立つ．
(ii) 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ と $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $|\alpha\boldsymbol{x}| = |\alpha|\,|\boldsymbol{x}|$．
(iii) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$．**（三角不等式）**

問１ 上の Lem. 1 を示せ[4]．

Prop. 1 2 点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$ と定義すると，写像 $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は**距離**の公理を満たす．即ち，

(i) **（非負値性）** 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0$ であり，
かつ $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \iff \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ が成り立つ．
(ii) **（対称性）** 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$．
(iii) **（三角不等式）** 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ に対して $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$．

問２ Lem. 1 を用いて Prop. 1 を示せ．(数学通論 I でも学習？)

上で定義した $\mathbb{R}^n$ 上のノルム $|\cdot|$ を**ユークリッドノルム**，距離 $d(\cdot, \cdot)$ を**ユークリッド距離**と呼びます．$n = 1$ のときは $x \in \mathbb{R}$ のユークリッドノルムは通常の絶対値 $|x|$，$x, y \in \mathbb{R}$ のユークリッド距離は $|x - y|$ となります．

---

[1] 線形代数ではベクトルを太字で書くということになっているので $\boldsymbol{x}$ や $\mathbf{0}$ と書いていますが，$\mathbb{R}^n$ の元であることが明らかな場合は x や 0 と表すこともあります（その場合，0 が実数の 0 なのか零ベクトルなのかは文脈で判断することになります）．

[2] 実数の絶対値 $|\cdot|$ と，$\mathbb{R}^n$ の元（ベクトル）のノルム $|\cdot|$ を同じ記号で書いているので，混同しないように注意しましょう．

[3] 一般に実線形空間 X に対して，(i)〜(iii) を満たすような写像 $|\cdot|$（ただし $\mathbb{R}^n$ は全て X に置き換える）を**ノルム**と呼びます．ただ，$|\cdot|$ と書くと実数の絶対値と混同しやすいので，ノルムは $\|\cdot\|$ のように二重線で表すことも多いです．(←ただし，実数の絶対値自身もノルムの一つです)

[4] (iii) の証明には**コーシー・シュワルツの不等式**を用います．

Def. 2（点列の収束） $\mathbb{R}^n$ における点列 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ が $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ に**収束**する
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \lim_{k\to\infty} d(\boldsymbol{x}^{(k)}, \boldsymbol{a}) = 0.\quad$ (i.e. $\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $k \geq N \implies d(\boldsymbol{x}^{(k)}, \boldsymbol{a}) < \varepsilon$.)

このとき，$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{a}$ や $\boldsymbol{x}^{(k)} \to \boldsymbol{a}$ $(k \to \infty)$ などと書く．また，$\boldsymbol{a}$ を点列 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ の**極限点**と呼ぶ.

Rem. 先程注意したとおり，$n = 1$ のときは $d(x, y) = |x - y|$ $(x, y \in \mathbb{R})$ ですから，点列（といっても各項は実数ですので数列）$\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ が $a \in \mathbb{R}$ に収束することは

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ \text{ s.t. }\ k \geq N \implies |x^{(k)} - a| < \varepsilon$$

となって，1 年生の時に学んだ数列の収束の定義と一致します.

Prop. 2 $\mathbb{R}^n$ の点列 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ が収束するとき，$\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ の極限点はただ一つである．

Prop. 2 の証明において，$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の具体的な形 $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)^2}$ は用いていません．用いたのは前ページの距離の公理 (i)〜(iii) だけです．即ち，**Prop. 2 は（ユークリッド距離でなくても）$\mathbb{R}^n$ 上のどんな距離を考えても成立する**ことが分かります．実際，$\mathbb{R}^n$ 上の距離としては，ユークリッド距離以外にも

$$d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|, \qquad d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max_{j=1,\dots,n} |x_j - y_j|$$

（ただし，$\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$）などいろいろあります．しかし，ユークリッド距離 $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)^2}$ は $\mathbb{R}^n$ の内積から決まる距離という特別な性質を持っており，解析を学ぶ上では使い勝手が良いこともあるので，**今後は $\mathbb{R}^n$ の距離といえばユークリッド距離を用いることにします**.

Rem. 上で定義された $\mathbb{R}^n$ 上の距離 d_1, d_∞ は，それぞれ $\mathbb{R}^n$ 上のノルム

$$|\boldsymbol{x}|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|, \qquad |\boldsymbol{x}|_\infty = \max_{j=1,\dots,n} |x_j| \qquad (\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n))$$

から導かれる距離になっています．実は,「有限次元線形空間上のノルムは全て同値である」という定理があり，その帰結として d, d_1, d_∞ のどれかの距離で収束すれば，他の距離でも収束していることが言えます．即ち，この三つのどの距離を用いても，収束に関する議論を行う際には違いはないことになります[5].

Prop. 3
(1) 収束する点列 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ は有界である．即ち，$\exists M > 0$ s.t. $\forall k \in \mathbb{N}$, $|\boldsymbol{x}^{(k)}| \leq M$ が成立する．
(2) 収束する点列 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ の任意の部分点列 $\{\boldsymbol{x}^{(k_i)}\}_{i=1}^{\infty}$ は同じ極限点に収束する．

[5]数学通論 I で学ぶ言葉を用いれば,「どの距離から導入される位相も等しい」ということです.

$\boxed{\textbf{問3}}$ Prop. 3 を示せ.

Prop. 4 $\boldsymbol{x}^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right)$, $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ とおくとき,

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{a} \quad \overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} \quad \lim_{k\to\infty} x_j^{(k)} = a_j \ \ (\forall j \in \{1, \ldots, n\}).$$

pf. $\Longrightarrow$ の証明には

$$\left|x_j^{(k)} - a_j\right| = \sqrt{\left(x_j^{(k)} - a_j\right)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(x_j^{(k)} - a_j\right)^2} = d\left(\boldsymbol{x}^{(k)}, \boldsymbol{a}\right)$$

を用いる. 詳しくは各自に任せる. ■

$\boxed{\textbf{問4}}$ Prop. 4 の証明を完成させよ.

Def. 3（コーシー列） $\mathbb{R}^n$ における点列 $\left\{\boldsymbol{x}^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ が**コーシー列**である
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 「$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $k, \ell \geq N \implies d\left(\boldsymbol{x}^{(k)}, \boldsymbol{x}^{(\ell)}\right) < \varepsilon.$」
（これを $\displaystyle\lim_{k,\ell\to\infty} d\left(\boldsymbol{x}^{(k)}, \boldsymbol{x}^{(\ell)}\right) = 0$ とも書く）

Prop. 5 $\left\{\boldsymbol{x}^{(k)}\right\}$ を $\mathbb{R}^n$ の点列とする.

(1) $\left\{\boldsymbol{x}^{(k)}\right\}$ が収束列 $\Longrightarrow$ $\left\{\boldsymbol{x}^{(k)}\right\}$ がコーシー列[6].
(2) $\boldsymbol{x}^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right)$ とおくとき,

$\left\{\boldsymbol{x}^{(k)}\right\}$ が $\mathbb{R}^n$ の距離 d に関してコーシー列
$\overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $j \in \{1, \ldots, n\}$ に対して数列 $\left\{x_j^{(k)}\right\}$ が $\mathbb{R}$ のコーシー列

$\boxed{\textbf{問5}}$ Prop. 5 を示せ.

実数 $\mathbb{R}$ に関しては, 次の 2 つの性質が成立していることを解析学 I で学びました.

> (1) **（ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理）**
> 有界な数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ は必ず収束する部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ を含む.
>
> (2) **（実数の完備性）** 任意の $\mathbb{R}$ におけるコーシー列は収束する.

これと同様の性質は $\mathbb{R}^n$ に対しても成立します.

Th. 1

(1) **（ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理）**
$\mathbb{R}^n$ 内の有界な点列 $\left\{\boldsymbol{x}^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ は必ず収束する部分列 $\left\{\boldsymbol{x}^{(k_i)}\right\}_{i=1}^{\infty}$ を含む.

(2) **（$\mathbb{R}^n$ の完備性）** 任意の $\mathbb{R}^n$ におけるコーシー列は収束する.

---

[6] この性質は $\mathbb{R}^n$ に限らず, あらゆる距離空間で成立します. しかし, 逆は必ずしも成立するとは限りません. 逆が成立するような（即ち, 任意のコーシー列が収束するような）距離空間は**完備**であると呼びます.

pf. (2) のみ示す．任意にコーシー列 $\left\{\boldsymbol{x}^{(k)}\right\} \subset \mathbb{R}^n$ を取る．このとき，ある $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ が存在して $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{a}$ となることを示す．

Prop. 5 (2) より，任意の $j \in \{1, \ldots, n\}$ に対して数列 $\left\{x_j^{(k)}\right\}$ が $\mathbb{R}$ のコーシー列である．従って実数の完備性より，任意の $j \in \{1, \ldots, n\}$ に対して，ある $a_j \in \mathbb{R}$ が存在して $\displaystyle\lim_{k\to\infty} x_j^{(k)} = a_j$ が成立する．

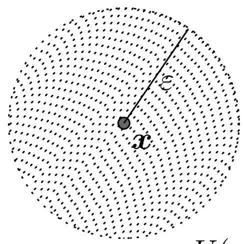
ここで $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ とおくと，Prop. 4 より $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{a}$ である． ■

次に $\mathbb{R}^n$ の位相的性質について述べます．しばらくは $\mathbb{R}^n$ だけでなく一般の距離空間に対しても同様に定義される概念，および同様に証明できる命題を述べます．

Def. 4（ε-近傍） $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0$ に対して，

$$U(\boldsymbol{x}; \varepsilon) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \mid d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) < \varepsilon\}$$

を，点 $\boldsymbol{x}$ の **ε-近傍**と呼ぶ[7]．



$U(\boldsymbol{x}; \varepsilon)$

集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ が**有界**であるとは，$\boxed{\exists M > 0 \text{ s.t. } \forall \boldsymbol{x} \in A, |\boldsymbol{x}| \leq M}$ が成り立つことを言いますが，これを Def. 4 で定義した記号を用いると

$$\exists M > 0 \ \text{ s.t. } \ \forall \boldsymbol{x} \in A, \ \boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{0}; M),$$

即ち，

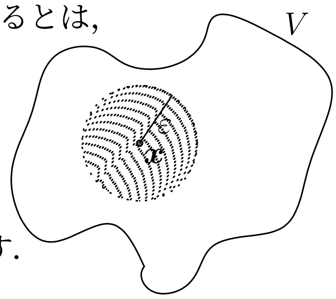
$$\exists M > 0 \ \text{ s.t. } \ A \subset U(\boldsymbol{0}; M)$$

となります[8]．

Def. 5（近傍） $V \subset \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して，V が $\boldsymbol{x}$ の**近傍**であるとは，

$$\exists \varepsilon > 0 \ \text{ s.t. } \ V \supset U(\boldsymbol{x}; \varepsilon)$$

が成り立つことを言う[9]．



以下，$A \subset \mathbb{R}^n$ に対し A^c で A の補集合 $(= \mathbb{R}^n \setminus A)$ を表します．

Def. 6（内点，外点，境界点） $A \subset \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対し，

(1) $\boldsymbol{x}$ が A の**内点** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists \delta > 0 \text{ s.t. } U(\boldsymbol{x}; \delta) \subset A$.

(2) $\boldsymbol{x}$ が A の**外点** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists \delta > 0 \text{ s.t. } U(\boldsymbol{x}; \delta) \subset A^c$.

(3) $\boldsymbol{x}$ が A の**境界点** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0, U(\boldsymbol{x}; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ かつ $U(\boldsymbol{x}; \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$.

---

[7]数学通論 I の講義，および解析学 III の教科書では $\boldsymbol{x}$ の ε-近傍 を $U(\boldsymbol{x}; \varepsilon)$ と書いているのでこの補足プリントでもそれに倣っていますが，解析では $B(\boldsymbol{x}, \varepsilon)$ や $B_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ と書くことも多いです．図形的には「中心が $\boldsymbol{x}$，半径 ε の開円板（3 次元であれば球）」になるわけで，B は Ball（球）の頭文字という気持ちです．実際，**開球**という言葉遣いをする場合もあります．

[8]集合の包含関係 $A \subset B$ は「$x \in A \Longrightarrow x \in B$」または「$\forall x \in A, x \in B$」を意味していたことに注意．

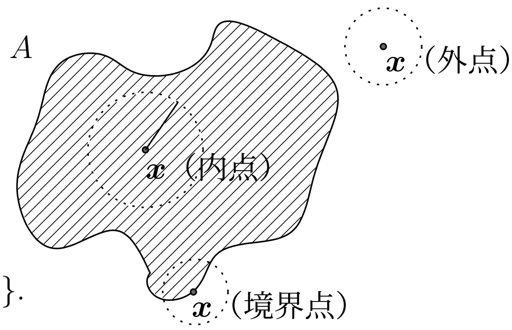
[9]V が $\boldsymbol{x}$ の近傍ならば，必然的に $\boldsymbol{x} \in V$ であることに注意．

Rem. (i) $\boldsymbol{x}$ が A の内点ならば，$\boldsymbol{x} \in A$ です.

(ii) $\boldsymbol{x}$ が A の外点ならば，$\boldsymbol{x} \in A^c$ です.

(iii) 「$\boldsymbol{x}$ は A の内点」「$\boldsymbol{x}$ は A の外点」「$\boldsymbol{x}$ は A の境界点」のいずれか一つ**のみ**が成立します.

Def. 7（触点，集積点，孤立点）



$A \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対し，

(4) $\boldsymbol{x}$ が A の**触点** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0,\, U(\boldsymbol{x}; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

(5) $\boldsymbol{x}$ が A の**集積点**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0,\, U(\boldsymbol{x}; \varepsilon) \cap (A \setminus \{\boldsymbol{x}\}) \neq \emptyset$.

(6) $\boldsymbol{x}$ が A の**孤立点** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists \delta > 0$ s.t. $U(\boldsymbol{x}; \delta) \cap A = \{\boldsymbol{x}\}$.

Rem. (iv) $\boldsymbol{x}$ は A の触点 $\overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$ $\boldsymbol{x}$ は A の内点または A の境界点

$\overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$ $\boldsymbol{x}$ は A の外点ではない

$\overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$ $\boldsymbol{x} \in A$ または $\boldsymbol{x}$ は A の集積点

(v) $\boldsymbol{x}$ が A の内点ならば，$\boldsymbol{x}$ は A の集積点です.

(vi) $\boldsymbol{x}$ が A の孤立点 $\overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$ $\boldsymbol{x}$ は A の境界点であり，かつ A の集積点でない.

(vii) $\boldsymbol{x}$ が A の外点ならば，$\boldsymbol{x}$ は A の集積点でも孤立点でもありません.

(viii) $\boldsymbol{x}$ が A の集積点 $\overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$ ある A の点からなる点列 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ が存在して，$\boldsymbol{x}^{(k)} \neq \boldsymbol{x}$ $(\forall k \in \mathbb{N})$

かつ $\displaystyle\lim_{k \to \infty} \boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{x}$ が成立する.

Def. 8（内部，外部，境界，閉包） $A \subset \mathbb{R}^n$ とする.

(1) $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{x}$ は A の内点$\}$ を A の**内部（開核）**と呼び，A° や $\operatorname{int} A$ で表す.

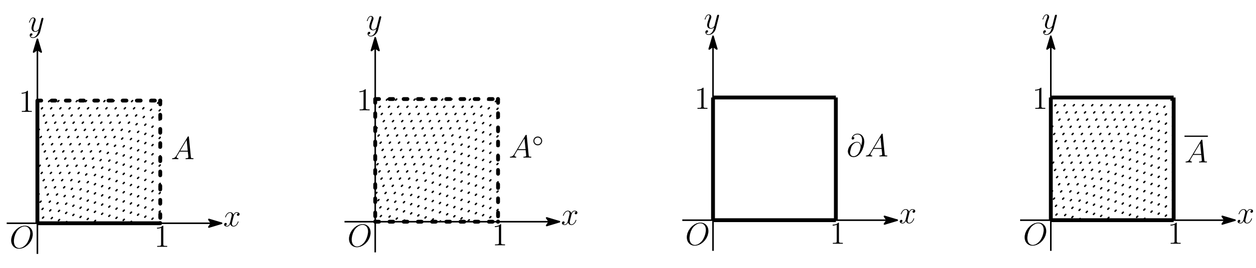
(2) $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{x}$ は A の外点$\}$ $(= (A^c)^\circ)$ を A の**外部**と呼び，A^e で表す.

(3) $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{x}$ は A の境界点$\}$ を A の**境界**と呼び，∂A で表す.

(4) $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{x}$ は A の触点$\} = A^\circ \cup \partial A$ $(= \mathbb{R}^n \setminus A^e)$ を A の**閉包**と呼び，$\overline{A}$ で表す.

Ex. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < 1,\ 0 \leq y < 1\}$ とすると，

- $A^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$.
- $\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ y = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ y = 1\}$
  $\cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0,\ 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$.
- $\overline{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$.



問6 上で述べた事実を証明せよ.

Def. 9（開集合，閉集合） $A \subset \mathbb{R}^n$ とする．

(1) A が $\mathbb{R}^n$ の**開集合** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall \boldsymbol{x} \in A, \exists \delta > 0$ s.t. $U(\boldsymbol{x}; \delta) \subset A$.
(2) A が $\mathbb{R}^n$ の**閉集合** $\overset{\text{def}}{\iff}$ A^c が $\mathbb{R}^n$ の開集合.

Ex. (1) $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合.
(2) $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ は $\mathbb{R}^2$ の閉集合.
(3) $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0$ に対して，$U(\boldsymbol{x}; \varepsilon)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合.

Prop. 6 $A \subset \mathbb{R}^n$ とする．

(1) A が $\mathbb{R}^n$ の開集合 $\overset{\text{同値}}{\iff}$ $A = A^\circ$.
(2) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$
(3) A°, A^e は $\mathbb{R}^n$ の開集合であり，$\partial A, \overline{A}$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である．
(4) $A^\circ \subset A \subset \overline{A}$.

Prop. 7 $A \subset \mathbb{R}^n, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ に対し，次の (a) と (b) は同値である．

(a) $\boldsymbol{a} \in \overline{A}$.
(b) ある A の点からなる点列 $\left\{\boldsymbol{x}^{(k)}\right\}$ が存在して，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{a}$.

Prop. 8 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対し，次の (a)〜(d) は同値である．

(a) A は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である．　　(b) $\overline{A} = A$.
(c) $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{x}$ は A の集積点$\} \subset A$ が成立する．
(d) A の点からなる任意の収束点列 $\left\{\boldsymbol{x}^{(k)}\right\}$ の極限点 $\boldsymbol{a}$ は必ず A に属している．

問 7 Prop. 6, Prop. 7, Prop. 8 を証明せよ．

最後に，$\mathbb{R}^n$ の有界閉集合に対して成立する重要な性質を述べます．この定理はユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ に対して成立するものであり，一般の距離空間に対しては必ずしも成立しません．

Th. 2（コンパクト性） $A \subset \mathbb{R}^n$ とする．このとき，(a)〜(c) は同値である．

(a) A は有界閉集合である．
(b)**（点列コンパクト性）** A の点からなる任意の点列 $\left\{\boldsymbol{x}^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ は，A の点に収束する部分列 $\left\{\boldsymbol{x}^{(k_i)}\right\}_{i=1}^{\infty}$ を必ず含む．
(c)**（コンパクト性）** A の任意の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，ある有限個の $\lambda_1, \cdots, \lambda_N \in \Lambda$ が存在して $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{N} U_{\lambda_j} \supset A$ となる[10].

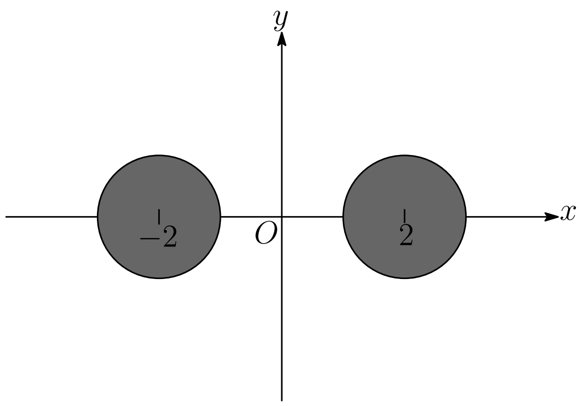
Rem. Th. 2 の (a) $\iff$ (c) の証明については，詳しくは数学通論 I の講義で学習したことでしょう．(a) $\iff$ (b) の証明もできるようにしてください．例えば，(a) $\Longrightarrow$ (b) は Th. 1 (1) と Prop. 8 を用いて示すことができます．

[10]「$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が A の開被覆である」とは，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して U_λ は $\mathbb{R}^n$ の開集合であり，かつ $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \supset A$ であることを言います．

<u>Def. 10（連結でない集合）</u> $A \subset \mathbb{R}^n$ が<u>連結でない</u>集合
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists U_1, U_2 : \mathbb{R}^n$ の開集合 s.t.

(i) $U_1 \cap A \neq \emptyset$, $U_2 \cap A \neq \emptyset$.
(ii) $U_1 \cap U_2 \cap A = \emptyset$.
(iii) $(U_1 \cap A) \cup (U_2 \cap A) = A$.

<u>Ex.</u> $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+2)^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + y^2 \leq 1\}$ は連結でない．なぜならば，$U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$, $U_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ とおけばよいからである．

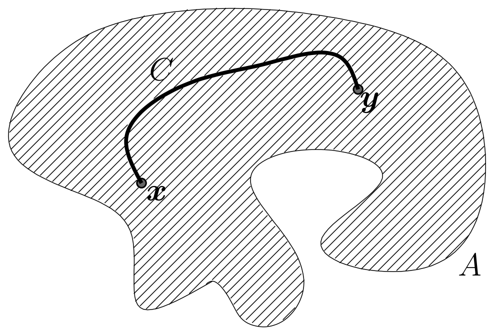


<u>Def. 11（連結集合）</u> $A \subset \mathbb{R}^n$ が「連結でない」集合ではないとき，A は<u>連結</u>な集合であるという．

<u>Def. 12（弧状連結集合）</u> $A \subset \mathbb{R}^n$ が<u>弧状連結</u>な集合
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の 2 点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$ に対して，ある連続曲線

$$C : x_1 = \varphi_1(t),\ \dots\ , x_n = \varphi_n(t) \qquad (t \in [0,1])$$

が存在して $\big\{\big(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\big) \in \mathbb{R}^n \mid t \in [0,1]\big\} \subset A$ かつ
$\boldsymbol{x} = \big(\varphi_1(0), \dots, \varphi_n(0)\big)$, $\boldsymbol{y} = \big(\varphi_1(1), \dots, \varphi_n(1)\big)$ が成立する．



<u>Th. 3</u> $A \subset \mathbb{R}^n$ が<u>開集合</u>ならば,

$$A \text{ が連結} \quad \overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} \quad A \text{ が弧状連結.}$$

<u>Rem.</u> Th.3 の証明は数学通論 II で行うと思いますので，解析学 III では証明せずにこの性質を用いることとします.

Def. 13（領域，閉領域）

(1) （弧状）連結な開集合のことを**領域**と呼ぶ.

(2) $A \subset \mathbb{R}^n$ が**閉領域** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists B \subset \mathbb{R}^n$：領域 s.t. $A = \overline{B}$.

Rem. A が領域ならば，その閉包 $\overline{A}$ は閉領域となります.