

プリントは <https://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/takimoto/R7Kai3.html> にも置いてあります.

このプリントでは, 6/20 の講義で扱う「数列の上極限と下極限」の定義に関してまとめてあります. 6/20 の講義までにこのプリント, およびオレンジ色の方の教科書(「理工系のための微分積分 I」)の p.38~p.39 をよく読んでおいてください.

● 数列の上極限と下極限

$a_n = (-1)^{n-1}$ で定義される数列 $\{a_n\} = \{1, -1, 1, -1, \dots\}$ は極限值をもたない. しかし, どんなに先の番号を考えても 1 も -1 も現れるので, この数列 $\{a_n\}$ にとって 1 や -1 は極限值ではないものの何か意味のある数であると言えるであろう. ここでは, 数列の上極限・下極限について学習する.

いま, $\{a_n\}$ を上に有界な数列とする. このとき, $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\{a_n\}$ の第 n 項以降を取り出す.

$$\begin{array}{rcl} n=1 & \rightarrow & \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots\} \\ n=2 & \rightarrow & \{a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots\} \\ n=3 & \rightarrow & \{a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots\} \\ & \vdots & \vdots \\ n=n & \rightarrow & \{a_n, a_{n+1}, \dots\} \\ & \vdots & \vdots \end{array}$$

次に, $\{a_n\}$ の第 n 項以降を取り出した数列の上限を $\alpha_n = \sup_{k \geq n} a_k$ とおく. ($\{a_n\}$ は上に有界なので α_n は必ず存在する)

$$\begin{array}{c} \text{単調減少} \\ \downarrow \\ \begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & \sup\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots\} \\ \alpha_2 & = & \sup\{a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots\} \\ \alpha_3 & = & \sup\{a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots\} \\ & \vdots & \vdots \\ \alpha_n & = & \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\} \\ & \vdots & \vdots \end{array} \end{array}$$

すると数列 $\{\alpha_n\}$ は単調減少数列となる(なぜならば, n が大きくなると, $\sup$ を取る項の範囲が狭くなるからである). 従って, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ は収束するか $-\infty$ に発散する.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} a_k \right)$ のことを $\{a_n\}$ の上極限と呼び, $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ または $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ と書く.

もし $\{a_n\}$ が上に有界でない数列ならば, $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ と定める.

同様にして, $\{a_n\}$ が下に有界な数列とするとき, $\beta_n = \inf_{k \geq n} a_k$ の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{k \geq n} a_k \right)$ のことを $\{a_n\}$ の下極限と呼び, $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ または $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ と書く. もし $\{a_n\}$ が下に有界でない数列ならば, $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ と定める.

注意. 単調減少数列の極限值は、その数列の下限に等しいので、

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{k \geq n} a_k \right)$$

と書くことができる。同様にして

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\inf_{k \geq n} a_k \right)$$

と書くこともできる。

例 1

(i) $a_n = (-1)^{n-1}$ とおくと、 $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $\alpha_n := \sup_{k \geq n} a_k = 1$, $\beta_n := \inf_{k \geq n} a_k = -1$ であるから、

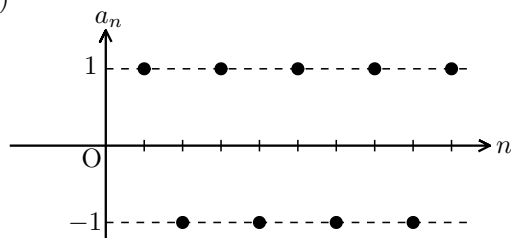
$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = -1.$$

(ii) $a_n = \frac{1}{n} - \frac{n}{2}(1+(-1)^n)$ とおくと $\left(\{a_n\} = \left\{ \frac{1}{1} - 0, \frac{1}{2} - 2, \frac{1}{3} - 0, \frac{1}{4} - 4, \frac{1}{5} - 0, \frac{1}{6} - 6, \dots \right\} \right)$,

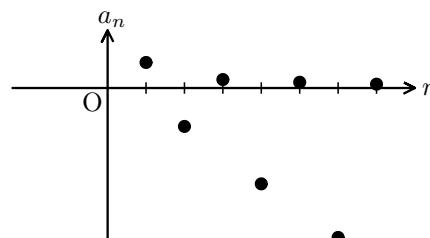
$$\alpha_n := \sup_{k \geq n} a_k = \begin{cases} \frac{1}{n} & (n : \text{奇数}) \\ \frac{1}{n+1} & (n : \text{偶数}) \end{cases}$$

であるから、 $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$. また $\{a_n\}$ は下に有界でないから $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

(i)



(ii)



問

- (1) $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の上極限・下極限を求めよ。(答：それぞれ $1, -1$)
- (2) $a_n = \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n}{2}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の上極限・下極限を求めよ。(答：それぞれ $0, 0$)

一般に数列の極限は必ずしも存在するとは限らないが、上極限・下極限は $(-\infty$ および ∞ を許せば) 必ず存在する。このことは大変重要な性質であり、解析学における証明ではしばしば用いられる。上極限・下極限に関する重要な性質は多くあるが、それらについては演習問題 No.4 を参照せよ（講義ではオレンジ色の教科書の p.39 にある定理 2.2.14 と教科書に書かれていない定理一つを扱う）。