

プリントは <http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R7SuurikaisekiA.html> にも置いてあります。

定義. $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 \leq p < \infty$ に対し,

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) = \{f \in L^p(\mathbb{R}^N) \mid |\alpha| \leq m \implies D^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^N)\}.$$

ただし $D^\alpha f$ は f の α 階超関数微分を表す.

また, $f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ に対し,

$$\|f\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

と定義する (すると $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$ は $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ 上のノルムである.).

注意. 本当は $p = \infty$ のときも Sobolev 空間 $W^{m,\infty}(\mathbb{R}^N)$ が考えられます.

注意. m は微分の階数, p は Lebesgue 指数を表しています. $W^{0,p}(\mathbb{R}^N) = L^p(\mathbb{R}^N)$ です.

定理. $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ は Banach 空間である.

[証明] 完備性のみを示す. $(f_k)_{k=1}^\infty \subset W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ を任意の Cauchy 列とする.

目標 $f_k \rightarrow f$ in $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ となる $f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ が存在することを示す.
まずは f を決めねば!

$|\alpha| \leq m$ となる各 α に対し,

$$\|D^\alpha f_k - D^\alpha f_l\|_p \leq \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha (f_k - f_l)\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|f_k - f_l\|_{W^{m,p}} \rightarrow 0 \quad (k, l \rightarrow \infty)$$

であるから, $(D^\alpha f_k)_{k=1}^\infty$ は $L^p(\mathbb{R}^N)$ の Cauchy 列である. 従って, $L^p(\mathbb{R}^N)$ の完備性から

$$\exists f^\alpha \in L^p(\mathbb{R}^N) \text{ s.t. } D^\alpha f_k \rightarrow f^\alpha \text{ in } L^p(\mathbb{R}^N)$$

が成立する. (各 α ごとに f^α が定まることに注意)

$\alpha = (0, \dots, 0)$ のときの f^α を f と書く. (← f が決まった!)

Claim. $|\alpha| \leq m$ を満たす任意の α に対して, f の α 階超関数微分は f^α である. 即ち,

$$D^\alpha f = f^\alpha \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$$

が成立する.

この **Claim.** が証明できれば, 任意の $|\alpha| \leq m$ に対して $D^\alpha f = f^\alpha \in L^p(\mathbb{R}^N)$ より $f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ であり, また $D^\alpha f_k \rightarrow D^\alpha f$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$ より

$$\|f_k - f\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f_k - D^\alpha f\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

が言える.

Claim. の証明

任意の $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ をとると,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (D^\alpha f_k)(x) \varphi(x) dx &= \langle D^\alpha f_k, \varphi \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle f_k, D^\alpha \varphi \rangle \quad (\text{超関数微分の定義}) \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^N} f_k(x) (D^\alpha \varphi)(x) dx. \quad (*) \end{aligned}$$

左辺の $k \rightarrow \infty$ の極限は $\int_{\mathbb{R}^N} f^\alpha(x) \varphi(x) dx$ である. 実際,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^N} (D^\alpha f_k)(x) \varphi(x) dx - \int_{\mathbb{R}^N} f^\alpha(x) \varphi(x) dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |(D^\alpha f_k)(x) - f^\alpha(x)| |\varphi(x)| dx \\ &= \int_{\text{supp } \varphi} |(D^\alpha f_k)(x) - f^\alpha(x)| |\varphi(x)| dx \\ &\leq \sup_{x \in \text{supp } \varphi} |\varphi(x)| \int_{\text{supp } \varphi} |(D^\alpha f_k)(x) - f^\alpha(x)| dx. \end{aligned}$$

$p = 1$ のときは, $D^\alpha f_k$ は f^α に L^1 収束しているので, 最右辺 $\rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) である.

$p > 1$ のときは Hölder の不等式より

$$(\text{最右辺}) \leq C \|D^\alpha f_k - f^\alpha\|_p \cdot |\text{supp } \varphi|^{\frac{1}{q}} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

が成立する. ここで C はある正定数, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $|\text{supp } \varphi|$ は $\text{supp } \varphi$ の N 次元測度である.

従って (*) の左辺は $k \rightarrow \infty$ のとき $\int_{\mathbb{R}^N} f^\alpha(x) \varphi(x) dx$ に収束する.

同様にして, (*) の右辺は $k \rightarrow \infty$ のとき $(-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) D^\alpha \varphi(x) dx$ に収束する. 故に

$$\int_{\mathbb{R}^N} f^\alpha(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) D^\alpha \varphi(x) dx$$

を得る. この等式は任意の $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ に対して成立するので,

$$D^\alpha f = f^\alpha \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$$

が成立する. ■