数理解析学 A・数理解析基礎講義 A 演習問題 No.9 (2025.5.15 出題)

演習問題は <http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R7SuurikaisekiA.html> にも置いてあります。

以下の問題は自習用の演習問題ですが、演習問題のいくつかを期末試験で出題するかもしれません。

[62] $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ とする。いま, $U : \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$\langle U, \varphi \rangle := \alpha \langle T, \varphi \rangle + \beta \langle S, \varphi \rangle \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N))$$

と定めると, $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ であることを示せ。(この U を $\alpha T + \beta S$ と書く)

[63] $a \in \mathbb{R}$ に対し, $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$ ($\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$) で与えられる δ_a は超関数となることは前回の講義と同様に証明される。 $\delta_a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ を **a を台にもつ Dirac の δ 関数**と呼ぶ。

さて, 次で定義される $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ を考える。

$$T(\varphi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(n) \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})).$$

(1) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ に対して, 級数 $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(n)$ は収束することを示せ。

(従って $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ は well-defined です)

(2) $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ であることを示せ。(この T を $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n$ と書く)

[64] この問題では $\mathbb{R}$ 上の関数, 超関数を考える。

(1) $x\delta' = -\delta$ を示せ。

(2) $m, n \in \mathbb{N}$ に対して, $x^m \delta^{(n)}$ を求めよ。

[65] $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, $j \in \{1, \dots, N\}$ のとき, 次を示せ。

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(fT) = \frac{\partial f}{\partial x_j} T + f \frac{\partial T}{\partial x_j}.$$

(ヒント: 任意の $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ に対して $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}(fT), \varphi \right\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_j} T + f \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle$ であることを示せば O.K.)

[66] (超関数に関する微分の順序交換) $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, $j, k \in \{1, \dots, N\}$ とする。このとき,

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial x_k} \right)$$

を示せ。

(裏に続く)

[67] $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x) = |x|$ を考える.

- (1) f を超関数とみなしたものを T_f と書く. T_f の超関数としての微分 T'_f を求めよ.
- (2) T''_f を求めよ.

[68] $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x) = \log|x|$ を考える.

- (1) $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ であることを示せ.
- (2) (1) より f を超関数とみなすことができる. これを T_f と書く.
 T_f の超関数としての微分 T'_f が p.v. $\frac{1}{x}$ であることを示せ.

(ヒント:

$$\langle T'_f, \varphi \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} \log|x| \varphi'(x) dx = - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \log|x| \varphi'(x) dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \log|x| \varphi'(x) dx \right)$$

と変形して部分積分)

[69] この問題では $\mathbb{R}$ 上の関数, 超関数を考える.

- (1) $T'' = 0$ を満たす超関数 $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ をすべて求めよ.
- (2) Y を Heaviside 関数とすると, $T' = Y$ を満たす $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ を全て求めよ.
- (3) $T' = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n$ を満たす $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ を一つ求めよ. (表面にある [63] を参照)

(2 枚目に続く)

[70] $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を領域とする。このとき、

- C^1 級関数 $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、 $\text{grad } u := \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$. (u の勾配と呼ぶ)
- C^1 級写像 (ベクトル場) $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_N) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ に対して、

$$\text{div } \mathbf{w} := \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial w_N}{\partial x_N}. \quad (\mathbf{w} \text{ の発散と呼ぶ})$$

と定義する。このとき、次が成立する¹。

定理 (Gauss の発散定理)

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を C^1 級の境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域、 $\mathbf{w}$ を C^1 級のベクトル場とする。このとき、

$$\int_{\Omega} \text{div } \mathbf{w}(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{w}(x) \cdot \boldsymbol{\nu}(x) \, ds$$

が成立する。ただし、 $\boldsymbol{\nu}(x)$ は $x \in \partial\Omega$ における $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトル、 ds は $\partial\Omega$ における $N-1$ 次元面積要素、 $\cdot$ は $\mathbb{R}^N$ における通常の内積を表す。

以下、 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を C^1 級の境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域、 $u, v \in C^2(\Omega)$ とする。

(1) Gauss の発散定理において $\mathbf{w} = \text{grad } u$ を代入することにより、

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(x) \, ds$$

が成立することを示せ。ただし、

$$\Delta u(x) := \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(x) := \text{grad } u(x) \cdot \boldsymbol{\nu}(x) \quad (\text{即ち, } x \text{ における } u \text{ の外向き単位法線方向微分})$$

である。

(2) (Green の公式) Gauss の発散定理において $\mathbf{w} = v \text{ grad } u$ と $\mathbf{w} = u \text{ grad } v$ を代入した式を辺々引くことにより、

$$\int_{\Omega} (v(x)\Delta u(x) - u(x)\Delta v(x)) \, dx = \int_{\partial\Omega} \left(v(x) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(x) - u(x) \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}}(x) \right) \, ds$$

が成立することを示せ。

(裏に続く)

¹詳しくは適当な微分積分に関するテキストを参照して下さい。昨年度と今年度、滝本は1,2年生の解析学の講義で「理工系のための微分積分 I,II」(鈴木・山田・柴田・田中著)を教科書として用いていますが、この本の第8章に載っています。

[71] $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上の関数 $u(x) = \log \frac{1}{|x|}$ (即ち, $u(x_1, x_2) = -\log \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$) を考える.

- (1) 任意の $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ に対して $\Delta u(x) = 0$ が成り立つことを確かめよ.
- (2) u を $\mathbb{R}^2$ 上の可測関数とみたとき, $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ であることを示せ.
- (3) (2) の結果から, u は $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ の元とみなすことができる. このとき, 超関数微分の意味で

$$\Delta u = -2\pi\delta \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$$

が成立することを証明しよう.

- (i) 任意に $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ を取る. このとき, $\text{supp } \varphi \subset \{|x| < R\}$ となる $R > 0$ を選べば,

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle = \langle u, \Delta \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\log \frac{1}{|x|} \right) \Delta \varphi(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\{\varepsilon < |x| < R\}} \left(\log \frac{1}{|x|} \right) \Delta \varphi(x) dx$$

と書ける. 最右辺に [70](2) (Green の公式) を適用することにより, 次の等式を示せ. ただし $B_{\varepsilon,R} := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \varepsilon < |x| < R\}$ とする.

$$\begin{aligned} \langle \Delta u, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} & \left(\int_{B_{\varepsilon,R}} \Delta \left(\log \frac{1}{|x|} \right) \varphi(x) dx + \int_{\partial B_{\varepsilon,R}} \left(\log \frac{1}{|x|} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(x) ds \right. \\ & \left. - \int_{\partial B_{\varepsilon,R}} \varphi(x) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\log \frac{1}{|x|} \right) ds \right). \end{aligned}$$

- (ii) さらに, (1) の結果, および $|x| = R$ 上では $\varphi(x) = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(x) = 0$ であることを用いて, 次を示せ. ただし, ν は $\partial B_{\varepsilon,R}$ の外向き単位法線ベクトルである.

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{|x|=\varepsilon} \left(\log \frac{1}{|x|} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(x) ds - \int_{|x|=\varepsilon} \varphi(x) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\log \frac{1}{|x|} \right) ds \right).$$

- (iii) (ii) の結論にある式の右辺のカッコの中の, 第 1 項の積分を I_ε , 第 2 項の積分を J_ε とおく. $I_\varepsilon \rightarrow 0$ ($\varepsilon \rightarrow +0$) を示せ.

- (iv) $\frac{\partial}{\partial \nu} \left(\log \frac{1}{|x|} \right) = \frac{1}{|x|}$ を示し, それを用いて $J_\varepsilon \rightarrow 2\pi\varphi(0)$ ($\varepsilon \rightarrow +0$) を導け.

- (v) 以上の結果より, $\Delta u = -2\pi\delta$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ が成り立つことを示せ.

[72] $\mathbb{R}^3$ 上の関数 $u(x) = \frac{1}{|x|}$ (即ち, $u(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$) は $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ の元であることを示し, 超関数微分の意味で

$$\Delta u = -4\pi\delta \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

が成立することを, 前問と同様の方法により証明せよ.