

数理解析学 A・数理解析基礎講義 A 演習問題 No.8 (2025.5.13 出題)

演習問題は <http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R7SuurikaisekiA.html> にも置いてあります。

以下の問題は自習用の演習問題ですが、演習問題のいくつかを期末試験で出題するかもしれません。

[57] $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を $\psi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & (-1 < x < 1) \\ 0 & (x \leq -1, x \geq 1) \end{cases}$ で定めると、 $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ であることは既に講義で述べた。

次の (1)~(4) の命題の真偽を判定せよ。

- (1) $n \in \mathbb{N}$ に対して $\varphi_n(x) := \frac{1}{n}\psi(x)$ とおくと、 $\varphi_n \rightarrow 0$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ($n \rightarrow \infty$).
- (2) $n \in \mathbb{N}$ に対して $\varphi_n(x) := \frac{1}{n}\psi(x-n)$ とおくと、 $\varphi_n \rightarrow 0$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ($n \rightarrow \infty$).
- (3) $n \in \mathbb{N}$ に対して $\varphi_n(x) := \frac{1}{n}\psi(nx)$ とおくと、 $\varphi_n \rightarrow 0$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ($n \rightarrow \infty$).
- (4) $n \in \mathbb{N}$ に対して $\varphi_n(x) := e^{-n}\psi(nx)$ とおくと、 $\varphi_n \rightarrow 0$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ($n \rightarrow \infty$).

[58] $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ に対し、

$$\varphi_n \rightarrow \psi \text{ in } \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \ (n \rightarrow \infty) \stackrel{\text{def}}{\iff} \varphi_n - \psi \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \ (n \rightarrow \infty)$$

と定義する。

$T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ である (即ち、 $T: \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{C}$ が超関数である) ならば、次が成立することを示せ¹。

$$\varphi_n \rightarrow \psi \text{ in } \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \ (n \rightarrow \infty) \implies T(\varphi_n) \rightarrow T(\psi) \ (n \rightarrow \infty).$$

[59] $1 \leq p \leq \infty$ とする。 $\mathbb{R}^N$ 上の可測関数 u で、

$$\mathbb{R}^N \text{ の任意のコンパクト集合 } K \text{ に対して, } u|_K \in L^p(K)$$

を満たすものの全体の集合を $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ と書く。このとき、次を示せ。

- (1) $L^p(\mathbb{R}^N) \subset L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. (←さすがに、ほぼ自明ではありますが……)
- (2) $C(\mathbb{R}^N) \subset L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$.
- (3) $1 \leq q \leq p \leq \infty$ ならば $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N) \subset L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$.
((1),(3) を併せると $L^p(\mathbb{R}^N) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ が分かる)

(裏に続く)

¹これは T が $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ 上で連続であることを示しています。つまり、「 $T: \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{C}$ が線形であるとき、『 $\varphi_n \rightarrow 0$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ ($n \rightarrow \infty$) $\implies T(\varphi_n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)』を示せば T の連続性が言える」ことを示せ、という問題です。

[60] 講義では証明を省略した次の命題の証明を与えよ.

$f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ とする. もし「任意の $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ に対して $\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x) dx = 0$ 」が成立するならば, $f(x) = 0$ a.e. $x \in \mathbb{R}^N$ である.

[61] 次で定義される $T: \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ は超関数であるか否かを判定せよ.

(1) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ に対して, $T(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi(x) dx$ で定義される T .

(2) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ に対して, $T(\varphi) = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^{\frac{1}{2}}} dx$ で定義される T .

(3) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ に対して, $T(\varphi) = \int_0^{\infty} e^{\frac{1}{x}} \varphi(x) dx$ で定義される T .