

数理解析学 A・数理解析基礎講義 A 演習問題 No.7 (2025.5.8 出題)

演習問題は <http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R7SuurikaisekiA.html> にも置いてあります。

以下の問題は自習用の演習問題ですが、演習問題のいくつかを期末試験で出題するかもしれません。

[48] $f, g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ とするとき、次が成り立つことを示せ。

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)g(x) dx = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(-\xi) d\xi.$$

(注意：[18] がヒントではありますが、[18] は $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ が仮定であることに注意。
証明には講義で扱ったような極限操作が必要です。)

[49] $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ とする。このとき、 $f * g$ の ($L^2(\mathbb{R}^N)$ の意味での) Fourier 変換 $\mathcal{F}(f * g)(\xi)$ は $\widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$ にほとんどいたるところ等しいことを示せ。

[50] $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ とする。 $R > 0$ に対して

$$f_R(x) = \begin{cases} f(x) & (|x| \leq R) \\ 0 & (|x| > R) \end{cases}$$

と定める。このとき、次を示せ。

- (1) $f_R \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$.
- (2) $\|f_R - f\|_2 \rightarrow 0$ ($R \rightarrow \infty$).

[51] $t < 0$ のとき、

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow +0 \\ R \rightarrow \infty}} \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^R \right) \frac{e^{ixt}}{x} dx$$

の値が $-\pi i$ であることを確かめよ。(注意：積分路をどう取るかを考えよ)

[52] $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x) = \frac{1}{x+i}$ を考える。

- (1) $f \notin L^1(\mathbb{R})$ だが $f \in L^2(\mathbb{R})$ であることを確かめよ。(注意： $|f(x)| = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$)
- (2) f の ($L^2(\mathbb{R})$ の意味での) Fourier 変換を求めよ。

[53] $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ の Fourier 変換を求めよ。

(これも $f \notin L^1(\mathbb{R})$ だが $f \in L^2(\mathbb{R})$ である)

(ヒント： $f(x) = \frac{a}{x+i} + \frac{b}{x-i}$ と変形して [52] の結果を用いる)

(裏に続く)

[54] 次の積分の値を求めよ. (ヒント: Plancherel の定理)

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|x|} \sin x}{x} dx. \quad (2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(e^x + e^{-x})} dx.$$

[55] $n \in \mathbb{N}$ に対し, $L^2(\mathbb{R})$ の部分集合 X_n, Y_n を次のように定める.

$$X_n = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid f \text{ は区間 } [-n, n] \text{ の外ではほとんどいたるところ } 0 \text{ に等しい}\},$$

$$Y_n = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \hat{f} \in X_n\}.$$

さらに, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n, Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ とおく.

(1) X, Y はともに $L^2(\mathbb{R})$ の稠密な部分空間であることを示せ.

(2) $X \cap Y = \{0\}$ であることを示せ.

(ヒント: $f \in X_j \cap Y_k$ とおく. すると $\hat{f}(\xi) = \int_{-j}^j f(x)e^{-i\xi x} dx$ となる. このとき $\hat{f}(\xi)$ の定義域を $\mathbb{R}$ から $\mathbb{C}$ に拡張できて, しかも $\hat{f}$ が $\mathbb{C}$ 上の正則関数となることを示す.)

[56] $t > 0$ に対して, $G_t: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$G_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

と定義する. いま, $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ に対して $u(x, t) = (G_t * f)(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) dy$ とおく. このとき, 次を示せ.

(1) $u(x, t)$ は $\mathbb{R}^N \times (0, \infty)$ 上で C^∞ 級であり, かつ熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \Delta u(x, t) \quad (x \in \mathbb{R}^N, t > 0)$$

を満たす.

(2) 任意の $t > 0$ に対して, $u(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ であり $\|u(\cdot, t)\|_1 \leq \|f\|_1$.

(ヒント: $\|G_t\|_1 = 1$ である)

(3) $\lim_{t \rightarrow +0} \|u(\cdot, t) - f\|_1 = 0$.

(4) さらに f が $\mathbb{R}^N$ 上で有界かつ一様連続な関数であれば, $\lim_{t \rightarrow +0} \|u(\cdot, t) - f\|_\infty = 0$.