数理解析学 A・数理解析基礎講義 A　演習問題　No.6　　（2025.5.1 出題）

演習問題は http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R7SuurikaisekiA.html にも置いてあります.

以下の問題は自習用の演習問題ですが，演習問題のいくつかを期末試験で出題するかもしれません.

[44] $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x) = x^2 e^{-x^2}$ の Fourier 変換を求めよ.

（ヒント：$g(x) = e^{-x^2}$ の Fourier 変換は計算しましたね．では $\widehat{f}(\xi)$ と $\widehat{g}(\xi)$ の関係は？）

[45] (1) $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ を任意の多重指数とする．このとき，$\partial^\alpha \left(\dfrac{1}{1+|x|^2} \right)$ は $\mathbb{R}^N$ 上で有界であることを示せ[1].

(2) $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ とし，$f(x) = \dfrac{g(x)}{1+|x|^2}$ と定める．このとき，$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ を示せ.

[46] (1) $f, g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ に対して，

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\overline{g(x)}\, dx \right| \le \|f\|_2 \|g\|_2 \qquad \cdots (*)$$

が成立することは既に講義で証明した（Cauchy-Schwarz の不等式）.

$(*)$ の式の等号が成立するのは，f, g の少なくとも一方が 0 であるか，ある $c \in \mathbb{C}$ が存在して $f = cg$ であるときであり，かつそのときに限ることを示せ[2].

(2) $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ を常に $f(x) > 0$ である関数とする．このとき，任意の $\xi \neq 0$ に対して $|\widehat{f}(\xi)| < \widehat{f}(0)$ を満たすことを示せ.

（ヒント：$f(x)e^{-ix\xi} = \left(\sqrt{f(x)}\right)\left(\sqrt{f(x)}e^{-ix\xi}\right)$ と分ける）

[47] (1) 次の命題を証明せよ.

ある正定数 $C > 0$ が存在し,「任意の $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して $\|f\|_2^2 \le C\|xf\|_2 \|\xi\widehat{f}\|_2$」が成立する.

(2) (1) の「……」を満たす正定数 C の最小値を求めよ.

---

[1]帰納法で $\partial^\alpha \left(\dfrac{1}{1+|x|^2} \right) = \dfrac{p_\alpha(x)}{(1+|x|^2)^{|\alpha|}}$（ただし $p_\alpha(x)$ は高々 $|\alpha|$ 次の多項式）であることを示します.

[2]一般に，実内積空間または複素内積空間 H において，Schwarz の不等式：

「任意の $u, v \in H$ に対して $|(u,v)| \le \sqrt{(u,u)}\sqrt{(v,v)}$ が成立する．等号成立条件は u, v の少なくとも一方が 0 であるか，ある $c \in \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ が存在して $u = cv$ であるときであり，かつそのときに限る」

が成立します．この一般的な命題を証明していただいても構いませんし，$L^2(\mathbb{R}^N)$ の場合に対して証明していただいても構いません.