

数理解析学 A・数理解析基礎講義 A 演習問題 No.14 (2025.6.3 出題)

演習問題は <http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R7SuurikaisekiA.html> にも置いてあります.

以下の問題は自習用の演習問題ですが, 演習問題のいくつかを期末試験で出題するかもしれません.

[98] $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x) = \chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & (x \in [-1, 1]) \\ 0 & (x \notin [-1, 1]) \end{cases}$ を考える.

- (1) f の Fourier 変換 $\hat{f}$ を求めよ. (演習問題 [16](1), [40](1) で計算済み)
- (2) $f \in H^s(\mathbb{R})$ となる実数 $s \geq 0$ の範囲を求めよ.

[99] $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x) = e^{-|x|}$ を考える.

- (1) f の Fourier 変換 $\hat{f}$ を求めよ.
- (2) $f \in H^s(\mathbb{R})$ となる実数 $s \geq 0$ の範囲を求めよ.
- (3) $f * f \in H^s(\mathbb{R})$ となる実数 $s \geq 0$ の範囲を求めよ.

[100] $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x) = e^{-|x|}$, $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ を考える.

- (1) $g \in H^s(\mathbb{R})$ となる実数 $s \geq 0$ の範囲を求めよ.
- (2) $f * g \in H^s(\mathbb{R})$ となる実数 $s \geq 0$ の範囲を求めよ.

(注意: 演習問題 No.7 [49] の結果を用いよ)

[101] $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x) = \begin{cases} 0 & (x < -1) \\ x+1 & (-1 \leq x < 0) \\ -x+1 & (0 \leq x < 1) \\ 0 & (x \geq 1) \end{cases}$ を考える.

- (1) f の超関数としての微分 f' , f'' を求めよ.
- (2) f の Fourier 変換 $\hat{f}$ を求めよ.
- (3) $f \in H^s(\mathbb{R})$ となる実数 $s \geq 0$ の範囲を求めよ.

[102] (1) $f \in L^2(\mathbb{R})$ かつ $f \notin H^1(\mathbb{R})$ となる f の例を挙げよ.

(2) $0 \leq s' < s$ のとき, $H^s(\mathbb{R}^N)$ は $H^{s'}(\mathbb{R}^N)$ の真部分集合であること (即ち, $H^s(\mathbb{R}^N) \subset H^{s'}(\mathbb{R}^N)$ かつ $H^s(\mathbb{R}^N) \neq H^{s'}(\mathbb{R}^N)$ であること) を示せ.

[103] 任意の $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ に対し,

$$-\Delta f + f = g \quad \text{in } \mathbb{R}^N$$

を満たす $f \in H^2(\mathbb{R}^N)$ がただ一つ存在することを示せ. ただし, $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_N^2}$ である.

(ヒント: 5/1 の授業でやった例と同じように考えてみよう)