

数理解析学 A・数理解析基礎講義 A 演習問題 No.13 (2025.5.29 出題)

演習問題は <http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R3SuurikaisekiA.html> にも置いてあります。

以下の問題は自習用の演習問題ですが、演習問題のいくつかを期末試験で出題するかもしれません。

[89] Fourier 変換をとるという写像 $\mathcal{F}: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ は全単射であることを授業で述べた¹。

さて、 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ 内の超関数列 $\{T_m\}_{m=1}^\infty$ が $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ に収束することを以下で定義する：

$$T_m \rightarrow T \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \stackrel{\text{def}}{\iff} \text{ 任意の } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \text{ に対して } \langle T_m, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle.$$

Fourier 変換をとるという写像 $\mathcal{F}: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ は連続であること、即ち $T_m \rightarrow T$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ ならば $\widehat{T_m} \rightarrow \widehat{T}$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ であることを示せ。

[90] $1 \leq p \leq \infty$ とする。 $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ ならば、 f を超関数とみなしたものは緩増加超関数であることを示せ。

(講義では $p = 1, p = 2$ の場合を示した。その他の場合は $p = 2$ の場合とほぼ同様である。)

[91] $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ ならば $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ であった。

では、 $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ であるとき、 f を超関数としてみたもの T_f の (超関数としての) Fourier 変換は $T_{\widehat{f}}$ に等しいことを示せ。

[92] (1) $e^x \cos x$ を $\mathbb{R}$ 上の超関数とみなしたものは、緩増加超関数ではないことを示せ。

(2) $\sin e^x$ を $\mathbb{R}$ 上の超関数とみなしたものは、緩増加超関数であることを示せ。

(3) $e^x \cos e^x$ を $\mathbb{R}$ 上の超関数とみなしたものは、緩増加超関数であるか？

(ヒント： $(\sin e^x)' = \dots$)

[93] 今日の講義で $\mathbb{R}$ 上の超関数の Fourier 変換の例として

$$\widehat{1} = 2\pi\delta, \quad \widehat{\delta} = 1, \quad \widehat{x^n} = 2\pi i^n \delta^{(n)} \quad (n \in \mathbb{N})$$

を挙げた。

(1) $a \in \mathbb{R}$ とする。 $\widehat{\delta_a}$ を求めよ。

(2) $\widehat{\delta'}$ を求めよ。また、 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\widehat{\delta^{(n)}}$ を求めよ。

(裏に続く)

¹正確には「言及した」だけですので、皆さんはきちんとした証明を付けてみましょう。

[94] $\mathbb{R}$ 上の超関数 $T = \text{p.v.} \frac{1}{x}$ の Fourier 変換を求めよう.

(1) $xT = 1$ であることを 5/15 の講義で証明した. これを用いて $(\widehat{T})'$ を求めよ.

(2) (1) の結果より, $\widehat{T}$ が積分定数を除いて決定される. 積分定数を決めよう. まず, 試験関数 $\varphi(\xi) = e^{-\xi^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ を $\widehat{T}$ に施すと

$$\langle \widehat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle = 0$$

であることを示せ. これを用いて積分定数を決定し, $\widehat{T}$ を求めよ².

[95] 任意の $\eta > 0$ に対し, $\mathbb{R}$ 上の関数 $\frac{1}{x + i\eta}$ は $L^2(\mathbb{R})$ に属するので, 今日の講義で学んだ結果から $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ の元とみなすことができる.

このとき, $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ において $\frac{1}{x + i\eta}$ を $\eta \rightarrow +0$ としたときの極限は $-\pi i\delta + \text{p.v.} \frac{1}{x}$ であることを示せ³.

[96] Heaviside 関数 $Y = Y(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$ の Fourier 変換を次の方法で求めてみよう.

(1) $\eta > 0$ に対して $Y_\eta(x) := Y(x)e^{-\eta x}$ とおく. このとき, $Y_\eta \rightarrow Y$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ($\eta \rightarrow +0$) を示せ. ($\mathcal{S}'$ における収束の定義は [89] を参照)

(2) [89] の結果より, $\widehat{Y}_\eta \rightarrow \widehat{Y}$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ が成立する. これと [95] の結果とをあわせて, $\widehat{Y}$ を求めよ.

[97] $f(x) = |x|$ を $\mathbb{R}$ 上の超関数とみなしたものを T_f とする.

(1) $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ を示せ.

(2) $\widehat{T}_f$ を求めよ.

(ヒント: まず $f(x) = 2xY(x) - x$ を示そう. すると

$$\widehat{T}_f = 2\widehat{xY} - \widehat{x} = \frac{2}{-i} \frac{\partial}{\partial \xi} \widehat{Y} - 2\pi i\delta' = \dots)$$

²答は $\widehat{T} = -2\pi iY + \pi i$ (ただし Y は Heaviside 関数) となります.

³即ち, 任意の $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して, $\left\langle \frac{1}{x + i\eta}, \varphi \right\rangle \rightarrow \left\langle -\pi i\delta + \text{p.v.} \frac{1}{x}, \varphi \right\rangle$ ($\eta \rightarrow +0$) であることを示せ, ということです.