

数理解析学 A・数理解析基礎講義 A 演習問題 No.12 (2025.5.27 出題)

演習問題は <http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R7SuurikaisekiA.html> にも置いてあります.

以下の問題は自習用の演習問題ですが, 演習問題のいくつかを期末試験で出題するかもしれません.

[85] $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ (即ち, T は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ 上の連続な線形汎関数) とする. 今日の講義の中で次のように説明した.

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ であるから, 定義域をせばめて T を $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ 上の線形汎関数とみなすことができる.

このとき, T は $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ 上で連続となる. 故に $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

上の 内の太字の部分を実証せよ.

[86] p.v. $\frac{1}{x}$ が $\mathbb{R}$ 上の緩増加超関数であることを示せ.

(ヒント: $\langle \text{p.v. } \frac{1}{x}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right)$ の積分区間を $|x| \geq 1$ と $|x| \leq 1$ に分け, $|x| \geq 1$ 内では $\frac{\varphi(x)}{x} = x\varphi(x) \cdot \frac{1}{x^2}$ と変形して積分の絶対値を $\sup_{x \in \mathbb{R}} |x| |\varphi(x)|$ の定数倍で押さえ, $|x| \leq 1$ 内では積分の絶対値を $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi'(x)|$ の定数倍で押さえる.)

[87] 演習問題 No.9 [63] で考えた超関数 $T = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n$ を考える. ($T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ であった)

(1) 任意の $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ と任意の $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ に対して, $|\varphi(n)| \leq \frac{P_2(\varphi)}{n^2}$ が成り立つことを示せ.

(ヒント (と言えるほどでもないけど): $P_2(\varphi)$ の定義を思い出そう)

(2) $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ を示せ.

(裏に続く)

[88] (合成積) $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ に対し, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ 上の汎関数 $S * T$ を次のように定める.

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ に対して, $\bar{\varphi}_x(y) := \varphi(x + y)$ と定める. このとき,

$$\langle S * T, \varphi \rangle := \langle S, \psi \rangle, \quad \text{ただし, } \psi(x) := \langle T, \bar{\varphi}_x \rangle \ (x \in \mathbb{R}^N).$$

(1) 任意の $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ に対して, $\langle S * T, \varphi \rangle$ は well-defined であることを示せ. また, $S * T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ であることを示せ¹. (ヒント: [73] も参照)

(2) $f \in C_0(\mathbb{R}^N)$, $g \in C(\mathbb{R}^N)$ とする. f を超関数とみなしたものを T_f , g を超関数とみなしたものを T_g , 通常合成積 $f * g$ を超関数とみなしたものを T_{f*g} と書くとき, 次を示せ.

$$T_f * T_g = T_{f*g}.$$

(3) 任意の $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ に対して $\delta * T = T$ が成り立つことを示せ.

(4) $\mathbb{R}$ 上の超関数の合成積 $\delta_1 * \delta_1$ を計算せよ.

(5) $\mathbb{R}$ 上の超関数の合成積 $\delta_1 * \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n$ を計算せよ.

(6) 任意の $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ および任意の $i = 1, \dots, N$ に対して

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(S * T) = \frac{\partial S}{\partial x_i} * T = S * \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

が成り立つことを示せ.

(7) $f(x) = \chi_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 1 & (x \in [0, 1]) \\ 0 & (x \notin [0, 1]) \end{cases}$ を $\mathbb{R}$ 上の超関数とみなしたものを T_f と書くこ

とにする. 合成積 $T_f * \text{p.v.} \frac{1}{x}$ を求めよ.

¹ $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ のときも, 同じ定義式で $S * T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ を定めることができます. このことも示してみましょう.