

数理解析学 A・数理解析基礎講義 A 演習問題 No.11 (2025.5.22 出題)

演習問題は <http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R7SuurikaisekiA.html> にも置いてあります.

以下の問題は自習用の演習問題ですが, 演習問題のいくつかを期末試験で出題するかもしれません.

[79] $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を $h(x) := \begin{cases} Ce^{\frac{1}{x^2-1}} & (-1 < x < 1) \\ 0 & (x \leq -1, x \geq 1) \end{cases}$ で定める. ただし $C > 0$ は $\int_{\mathbb{R}} h(x) dx = 1$ となるようにとる.

このとき, $\varepsilon > 0$ に対して $h_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon} h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ と定めると, $h_\varepsilon \rightarrow \delta$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ($\varepsilon \rightarrow +0$) であることを示せ¹.

[80] $f_n(x) := \frac{1}{\pi} \frac{n}{1+n^2x^2}$ と定めると, $f_n \rightarrow \delta$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ($n \rightarrow \infty$) であることを示せ.

[81] $f \in C(\mathbb{R}^N)$ とする. f を超関数と思ったものを T_f と書くことにすると,

$$\text{supp } T_f = \text{supp } f$$

が成り立つことを示せ.

[82] (1) $x^2T = 0$ を満たす $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ を全て求めよ. (ヒント: $\text{supp } T \subset \{0\}$ を示す)

(2) $(1-x^2)T = 0$ を満たす $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ を全て求めよ. (ヒント: $\text{supp } T \subset \{-1, 1\}$)

[83] (1) $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を $\psi(x) := \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & (-1 < x < 1) \\ 0 & (x \leq -1, x \geq 1) \end{cases}$ で定める ($\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ である).

$n \in \mathbb{N}$ に対して $\varphi_n(x) := n\psi(x-n)$ とおくと, $\psi_n \rightarrow 0$ in $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ ($n \rightarrow \infty$) であることを示せ.

(2) $\varphi_n(x) := e^{\frac{x}{n}}$ とおくと, $\psi_n \rightarrow 1$ in $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ ($n \rightarrow \infty$) であることを示せ.

[84] $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ とする. このときコンパクト台の超関数の列 $\{T_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ が存在して $T_n \rightarrow T$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ ($n \rightarrow \infty$) が成立することを示せ.

¹一般に, $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ を $\int_{\mathbb{R}^N} h(x) dx = 1$ が成り立つとしたとき, $h_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^N} h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ と定めると $h_\varepsilon \rightarrow \delta$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ ($\varepsilon \rightarrow +0$) が成立します.