

数理解析学 A・数理解析基礎講義 A 演習問題 No.10 (2025.5.20 出題)

演習問題は <http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R7SuurikaisekiA.html> にも置いてあります。

以下の問題は自習用の演習問題ですが、演習問題のいくつかを期末試験で出題するかもしれません。

[73] (合成積) $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ に対し, T と φ の合成積を

$$(T * \varphi)(x) := \langle T, \tilde{\varphi}_x \rangle \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

によって定義する. ただし, $\tilde{\varphi}_x \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ は $\tilde{\varphi}_x(z) = \varphi(x - z)$ ($z \in \mathbb{R}^N$) で定義される関数である.

(1) $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ とする. f を超関数とみなしたものを T_f とおくと, 任意の $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ に対して

$$(T_f * \varphi)(x) = (f * \varphi)(x) \quad (x \in \mathbb{R}^N)$$

が成立することを示せ. (右辺が well-defined であることを示す必要もある)

(2) 任意の $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ に対して $\delta * \varphi = \varphi$ が成立することを示せ¹.

(3) 任意の $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ に対して $T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ であり, 任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対して

$$D^\alpha(T * \varphi)(x) = \langle T, D^\alpha \tilde{\varphi}_x \rangle \quad (x \in \mathbb{R}^N)$$

が成立することを示せ.

(4) $\varphi_k \rightarrow \psi$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ ($k \rightarrow \infty$) ならば, $T * \varphi_k$ は $T * \psi$ に $\mathbb{R}^N$ 上で広義一様収束することを示せ.

[74] $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ の元 $(e^x - 1)\delta''$ の階数を求めよ.

[75] $T: \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ を $T(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(n) = \varphi(0) + \varphi'(1) + \varphi''(2) + \varphi'''(3) + \cdots$ と定める.

(1) $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ であることを示せ.

(2) T は階数をもたない (即ち, 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して T の階数は m 以下でない) ことを示せ.

(裏に続く)

¹これは δ 関数が合成積 $*$ に関して「単位元」の役割を果たしていることを示唆しています. 演習問題 No.4 [35] を参照.

[76] (1) $n \in \mathbb{N}$ に対し, $\sin nx$ を $\mathbb{R}$ 上の超関数とみなす. $n \rightarrow \infty$ としたとき, 超関数としての極限の意味で $\sin nx \rightarrow 0$ が成り立つことを示せ.

(ヒント: $\sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$ と Riemann-Lebesgue の定理)

(2) $n \in \mathbb{N}$ に対し, $\sin^2 nx$ を $\mathbb{R}$ 上の超関数とみなす. $n \rightarrow \infty$ としたとき, 超関数としての極限の意味で $\sin^2 nx \rightarrow \frac{1}{2}$ が成り立つことを示せ.

[77] $f \in C_0(\mathbb{R})$ とする.

(1) $n \in \mathbb{N}$ に対し, $f_n(x) = f(x-n)$ を $\mathbb{R}$ 上の超関数とみなす. $n \rightarrow \infty$ としたとき, 超関数としての極限の意味で $f_n \rightarrow 0$ が成り立つことを示せ².

(2) $n \in \mathbb{N}$ に対し, $g_n(x) = f\left(\frac{x}{n}\right)$ を $\mathbb{R}$ 上の超関数とみなす. 超関数としての極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ を求めよ.

[78] $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ の元 e^{inx} p.v. $\frac{1}{x}$ の $n \rightarrow \infty$ における極限を求めよ.

(ヒント: 議論の途中で Riemann-Lebesgue の定理を用います)

²証明をよく見ると, $f_n(x) = nf(x-n)$ であっても $f_n(x) = e^n f(x-n)$ であっても $f_n \rightarrow 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ であることが分かります.