

プリントは <https://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/takimoto/R7Kai3.html> にも置いてあります.

1 (解析学 I の復習) $\{a_n\}$ を実数列とすると、次の各問に答えよ.

- (1) 「級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する」ことの定義を述べよ. またそのとき, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和はどう定義されるか.
- (2) 「級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束する」ことの定義を述べよ.
- (3) 「級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が条件収束する」ことの定義を述べよ.
- (4) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ が収束するような実数 r の範囲を求めよ.
- (5) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ が収束するような実数 s の範囲を求めよ.
- (6) 「級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が交代級数である」ことの定義を述べよ.
- (7) 交代級数に関するライプニッツの定理のステートメントを述べよ.

2 $\{f_n(x)\}$ を $A \subset \mathbb{R}$ 上の関数列, $\{a_n\}$ を数列とする. 次の各問に答えよ.

- (1) 関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ が A 上で各点収束 (一様収束, 広義一様収束) することをどのように定義したか.
- (2) 関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ に対するワイエルシュトラスの M-test のステートメントを述べよ.
- (3) $\{f_n(x)\}$ を $[a, b]$ 上の連続関数列とする. 関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ の項別積分に関する定理¹のステートメントを述べよ.
- (4) $\{f_n(x)\}$ を区間 I 上の C^1 級関数列とする. 関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ の項別微分に関する定理²のステートメントを述べよ.
- (5) べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径の (講義における) 定義を述べよ.
- (6) 次のべき級数の収束半径をそれぞれ求めよ.
 - (a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (f) $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$
- (7) 数列 $\{a_n\}$ の上極限, 下極限の定義をそれぞれ述べよ.

¹ $\left[\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx \right]$ が成り立つことを保証する定理のことです.

² $\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \right]$ が成り立つことを保証する定理のことです.

(8) べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径に関するコーシー・アダマールの定理のステートメントを述べよ.

(9) べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ に関するアーベルの補題およびアーベルの定理のステートメントを述べよ.

3 次の各命題の真偽を判定し、その理由を述べよ. (2)~(4) では $A \subset \mathbb{R}$ とする. (下部に各命題の真偽についてのみ解答を掲載しました. 理由が分からないという方は質問してください.)

(1) 関数項級数 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ が区間 I 上で一様収束するならば, $s(x)$ は I 上で連続である.

(2) 関数列 $\{f_n(x)\}$ が A 上で一様収束するならば, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ も A 上で一様収束する.

(3) 関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ が A 上で一様収束するならば, $\{f_n(x)\}$ も A 上で一様収束する.

(4) $\{f_n(x)\}$ を A 上の関数列とする. もし, ある数列 $\{M_n\}$ が存在して, $f_n(x) \leq M_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A$) かつ $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ が収束するならば, $\{f_n(x)\}$ は A 上で一様収束する.

(5) $\{f_n(x)\}$ を A 上の関数列とする. もし, ある数列 $\{M_n\}$ が存在して, $|f_n(x)| \leq |M_n|$ ($\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A$) かつ $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ が収束するならば, $\{f_n(x)\}$ は A 上で一様収束する.

(6) 有界でない数列で, 上極限と下極限が一致するものが存在する.

(7) 収束する数列で, 上極限と下極限が一致しないものが存在する.

(8) 上限・下限・上極限・下極限が全て異なる数列が存在する.

(9) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して発散するべき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が存在する.

(10) $x = 1$ のときに発散するが, $x = -2$ のときに収束するべき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が存在する.

(11) 収束半径が R であるべき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は, 区間 $(-R, R)$ 上で絶対収束かつ一様収束する.

(12) 収束半径が ∞ であるべき級数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は, $\mathbb{R}$ 上で微分可能である.

(13) $\delta > 0$ とする. $|x| < \delta$ においてべき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ が収束し, かつ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ ならば, $a_n = b_n$ ($\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) である.

(14) $f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上の C^∞ 級関数とする. このとき, べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ の収束半径は ∞ であり, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ ($\forall x \in \mathbb{R}$) が成立する.

3 (1) 偽 (2) 偽 (3) 真 (4) 偽 (5) 偽 (6) 真 (7) 偽 (8) 真 (9) 偽 (10) 偽 (11) 偽 (12) 真 (13) 真 (14) 偽