解析学 III　チェックリスト－関数列の収束－ （2025.6.13 配布）

プリントは `https://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/takimoto/R7Kai3.html` にも置いてあります.

1 次の問に答えよ.

(1) $A \subset \mathbb{R}$, $\{f_n(x)\}$ を A 上の関数列とする．$\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に **A 上で各点収束する**ことの定義を論理記号を用いて述べよ（lim や「収束」という言葉を使わないこと）.

(2) $A \subset \mathbb{R}$, $\{f_n(x)\}$ を A 上の関数列とする．$\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に **A 上で一様収束する**ことの定義を論理記号を用いて述べよ（lim や「収束」という言葉を使わないこと）.

(3) $I \subset \mathbb{R}$ を区間, $\{f_n(x)\}$ を I 上の関数列とする．$\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に **I 上で広義一様収束（コンパクト一様収束）する**ことの定義を述べよ.

(4) $\{f_n(x)\}$ を A 上の関数列とする．**一様収束に関するコーシーの判定法**（$\{f_n(x)\}$ が（ある関数に）A 上で一様収束するための必要十分条件）について述べよ.

(5) **ディニの定理**のステートメントを述べよ.（$\{f_n(x)\}$ を $[a,b]$ 上の単調増加な……）

2 $f_n(x) = \begin{cases} n^3 x & \left(0 \leq x \leq \dfrac{1}{2n}\right) \\ n^2(1-nx) & \left(\dfrac{1}{2n} \leq x \leq \dfrac{1}{n}\right) \\ 0 & \left(\dfrac{1}{n} \leq x \leq 1\right) \end{cases}$ とおく.

(1) $f_n(x)$ のグラフを描け.

(2) 関数列 $\{f_n(x)\}$ の極限関数 $f(x)$ を求めよ.

(3) 関数列 $\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に $[0,1]$ 上で一様収束するか否かを判定せよ.

3 次の三つの性質を全て満たす $[0,1]$ 上の関数列 $\{f_n(x)\}$ の例を挙げよ.

(i) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n \in C([0,1])$.

(ii) 任意の $x \in [0,1]$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.　　(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \infty$.

4 次の各命題の真偽を判定し，その理由を述べよ．（裏面に各命題の真偽についてのみ解答を掲載しました．理由が分からないという方は質問してください.）

(1) $\{f_n(x)\}$ を A 上の関数列とし，$B \subset A$ とする．$\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に A 上で一様収束するならば，$\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に B 上で一様収束する.

(2) $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に A 上で一様収束するならば，$\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に A 上で各点収束する.

(3) $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に A 上で各点収束するならば，$\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に A 上で一様収束する.

(4) $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に区間 I 上で一様収束するならば，$\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に I 上で広義一様収束する．

(5) $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に開区間 (a,b) 上で広義一様収束するならば，$\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に (a,b) 上で一様収束する．

(6) $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に閉区間 $[a,b]$ 上で広義一様収束するならば，$\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に $[a,b]$ 上で一様収束する．

(7) $\{f_n(x)\}$ を区間 I 上の連続関数列とする．$\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に I 上で一様収束するならば，$f(x)$ も I 上で連続である．

(8) $\{f_n(x)\}$ を区間 I 上の連続関数列とし，$f(x)$ を $\{f_n(x)\}$ の I 上の極限関数とする．もし $f(x)$ が I 上で連続ならば，$\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に I 上で一様収束する．

(9) $\{f_n(x)\}$ を区間 I 上の連続関数列，$\{a_n\}$ を I 内の数列，$\alpha \in I$ とする．$\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に I 上で一様収束し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(a_n) = f(\alpha)$ が成立する．

(10) $\{f_n(x)\}$ を $[0,1]$ 上の連続関数列とし，$\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に $[0,1]$ 上で一様収束すると仮定する．このとき，$\left\{f_n(x)^2\right\}$ は $\left\{f(x)^2\right\}$ に $[0,1]$ 上で一様収束する．

(11) $\{f_n(x)\}$ を $[0,1]$ 上の連続関数列とし，$\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に $[0,1]$ 上で一様収束すると仮定する．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$ が成立する．

(12) $\{f_n(x)\}$ を $[0,\infty)$ 上で広義積分可能な連続関数列とし，$\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に $[0,\infty)$ 上で一様収束すると仮定する．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)\,dx = \int_0^\infty f(x)\,dx$ が成立する．

(13) $\{f_n(x)\}$ を区間 I 上の C^1 級関数列とし，$\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に I 上で一様収束すると仮定する．このとき，$f(x)$ も I 上で C^1 級であり，任意の $x \in I$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$ が成立する．

(14) $\{f_n(x)\}$ を区間 I 上の C^1 級関数列とし，$\{f_n'(x)\}$ は $g(x)$ に I 上で一様収束すると仮定する．このとき，$\{f_n(x)\}$ は I 上で一様収束し，極限関数 $f(x)$ は I 上で C^1 級であり $f'(x) = g(x)$ が成立する．

4 (1) 真　(2) 真　(3) 偽　(4) 真　(5) 偽　(6) 真　(7) 真　(8) 偽　(9) 真　(10) 真　(11) 真　(12) 偽　(13) 偽　(14) 偽

※ 極限と積分の順序交換，極限と微分の順序交換に関する定理のステートメントをよく確認しておくこと．