解析学 II 演習　演習問題 No.1　　（2026.12.4 配布）

小問について，(1), (2), ……と付いたものは小問ごとに発表して構いませんが，(a), (b), ……と付いたものはまとめて発表してください．

● 今回は前期の解析学 I で学んだ「1 変数関数の微分」の内容を復習する問題です．

◇ 自由発表問題

定理． 次は同値である．

① $f(x)$ は $x = x_0$ で微分可能である．

② （中略）

③ $\exists g(x)$：$x = x_0$ の近傍で定義された関数
s.t. $f(x) = f(x_0) + g(x)(x - x_0)$ かつ $g(x)$ は $x = x_0$ で連続．（このとき $g(x_0) = f'(x_0)$）

問題 1-1 $f(x), g(x)$ を区間 I 上で微分可能な関数とする．上で述べた**定理**の ① と ③ の同値性を用いて，次を示せ．

(1) $\dfrac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ $(x \in I)$.

(2) $g(x) \neq 0$ $(\forall x \in I)$ ならば，$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ $(x \in I)$.

問題 1-2 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ で定める．

(a) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で微分可能であることを示せ．

(b) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は $x = 0$ で連続ではないことを示せ．
（従って，$f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で C^1 級関数では**ない**ことが分かる）

問題 1-3 次の関数を微分せよ[1]．導出過程を明記すること[2]．

(a) x^α（ただし，$\alpha \in \mathbb{R}$）．　　(b) x^{x^x}.

問題 1-4 次の関数を微分せよ．導出過程を明記すること．

(a) $\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \dfrac{x}{a}\right)$ （ただし $a > 0$）．

(b) $\dfrac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}} \tan \dfrac{x}{2}\right)$（ただし，$a > b > 0$）．

（裏面に続く）

[1] 定義域はその関数が実数値関数として意味をもつ最大の集合とします（何も書かれていなければ，これは「暗黙の了解」となっているルールです）．

[2] (a) の答えは「$\alpha = 0$ ならば 0，$\alpha \neq 0$ ならば $\alpha x^{\alpha-1}$」です．しかし，$\alpha \in \mathbb{Z}$ のときは解析学 I の講義で示し，$\alpha \in \mathbb{Q}$ のときは解析学 I の自習用問題 No.1 **問 2** (2) で示したものの，$\alpha \notin \mathbb{Q}$ のときはまだ示していません．なお，$\log x$ $(x > 0)$ の導関数が $\dfrac{1}{x}$ であることは既に示しています．

問題 1-5 $f(x)$ は $[0,\infty)$ 上で連続，$(0,\infty)$ 上で微分可能な関数で，

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = f(0)$$

を満たすとする．このとき，$f'(\xi) = 0$ を満たす $\xi \in (0,\infty)$ が存在することを示せ．

問題 1-6 $f(x)$ を開区間 (a,b) 上で微分可能な関数とし，$c \in (a,b)$ とする．このとき，次の (i), (ii), (iii) を満たす数列 $\{x_n\}$ が存在することを示せ[3]．

(i) $c < x_n < b$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.　　(ii) $\lim_{n\to\infty} x_n = c$.　　(iii) $\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = f'(c)$.

問題 1-7 n を 2 以上の自然数とし，$F(x)$ を n 次多項式とする．もし方程式 $F(x) = 0$ が n 個の異なる実数解をもつならば，方程式 $F'(x) = 0$ は $(n-1)$ 個の異なる実数解をもつことを示せ．

問題 1-8 $\alpha = 0.1^\circ$ とする．**$f(x) = \tan x$ に平均値の定理を用いることにより**，$\tan\alpha$ を十進法で小数表示したとき，小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか，またその数字は何であるかを求めよ．

ただし，$3.1415 < \pi < 3.1416$, $1.4142 < \sqrt{2} < 1.4143$, $1.7320 < \sqrt{3} < 1.7321$ を用いてよいが，**電卓を使わず，手計算で求めること**．

[3] $f'(x)$ の連続性は仮定されていないことに注意してください．