

1 次の (a)~(e) を表す記号を、**選択肢**から一つずつ選んで答えよ.

- (a) 自然数全体の集合 (b) 整数全体の集合 (c) 有理数全体の集合
(d) 実数全体の集合 (e) 複素数全体の集合

選択肢:

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

[解答] (a) \mathbb{N} (b) \mathbb{Z} (c) \mathbb{Q} (d) \mathbb{R} (e) \mathbb{C}

コメント. これらの記号は世界中で共通認識となっており、今後数学を学ぶ上で基本的かつ重要なものです。早いうちに正しく記号を使えるようにしましょう。

2 次の命題の**否定命題**を書け。なお、解答の際に論理記号を用いてもよいが、否定を表す論理記号 \neg を用いてはいけない。

- (1) x は無理数である、または $0 < y \leq z$ である。
 (2) 任意の整数 a, b, c に対して、 $a^2 + b^2 = c^2$ ならば a, b, c のうち少なくとも一つは偶数である。
 (3) 理学部数学科の学生の誕生日はすべて異なる。
 (4) どんな食べ物が出てきても、誰かが喜んで食べる。
 (5) どんな食べ物が出てきても喜んで食べる、という人がいる。

[解答] (1) x は有理数である、かつ「 $y \leq 0$ または $y > z$ 」である。
 $(x \in \mathbb{Q} \wedge (y \leq 0 \vee y > z))$

(2) ある整数 a, b, c が存在して、 $a^2 + b^2 = c^2$ かつ a, b, c はすべて奇数である。
 $(\exists a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z}, \exists c \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } a^2 + b^2 = c^2 \wedge 2 \nmid a \wedge 2 \nmid b \wedge 2 \nmid c)$

(3) 理学部数学科には誕生日が同じ学生が少なくとも 1 組存在する。

(4) 誰も喜んででは食べない、という食べ物がある。

(5) どんな人にも、喜んででは食べない食べ物がある。

注意. 命題の意味を正しく理解したり、否定命題や対偶命題を正しく作ったりすることは、数学を学ぶ上での基本ですので、間違えた方はしっかり復習してください。

(1) で「 $0 < y \leq z$ の否定は「 $0 \geq y > z$ 」ではありません (不等式の否定 \rightarrow 不等号の向きを逆さにする! ……ではありません)。 $0 < y \leq z$ は「 $0 < y \wedge y \leq z$ 」という意味ですので、その否定は「 $y \leq 0 \vee y > z$ 」であるということ、およびかっこを付ける等をして意味をはっきりさせる必要がある、ということに注意してください。なお、「かつ」を表す論理記号は「 \wedge 」であって、「 \cap 」ではありません。

(3)は「理学部数学科の学生は全員誕生日が異なる」という状況があると仮定して、それを否定するにはどういう状況があればよいかを考えてみるとよいでしょう。「…誕生日が同じ人がいる」という答案が多く見られました。日本語として十分通じますが、「自分と誕生日が同じ人がいる」という違った意味も含まれるので、添削では敢えて△にしました。

論理記号を用いて考えてみましょう。理学部数学科の学生全体の集合を A とすると、

$$\forall x \in A, \forall y \in A, (x \neq y \Rightarrow (x \text{ の誕生日}) \neq (y \text{ の誕生日}))$$

となります。この否定を考えれば、

$$\exists x \in A, \exists y \in A \text{ s.t. } (x \neq y \wedge (x \text{ の誕生日}) = (y \text{ の誕生日}))$$

となり、日本語に直せば上のような解答が得られます。

(4)と(5)は同じ意味ではありません。(4)は論理記号を用いて

$$\boxed{\forall x: \text{食べ物}, \exists y: \text{人}, y \text{ は } x \text{ を喜んで食べる}} \dots\dots(*)$$

となります。この否定は

$$\boxed{\exists x: \text{食べ物}, \forall y: \text{人}, y \text{ は } x \text{ を喜んででは食べない}}$$

です。文章にすれば「ある食べ物 x が存在して、任意の人 y に対して、 y は x を喜んででは食べない」となるので、これを普通の日本語っぽく書くと上のような解答のようになります。(5)を論理記号を使って書くと、

$$\boxed{\exists y: \text{人}, \forall x: \text{食べ物}, y \text{ は } x \text{ を喜んで食べる}} \dots\dots(**)$$

となります。この否定は

$$\boxed{\forall y: \text{人}, \exists x: \text{食べ物}, y \text{ は } x \text{ を喜んででは食べない}}$$

です。文章にすれば「任意の人 y に対して、ある食べ物 x が存在して、 y は x を喜んででは食べない」となるので、これを普通の日本語っぽく書くと上のような解答のようになります。

(*)と()の意味が異なるということを理解してください。**(4)は食べ物が違えばそれを喜んで食べる人が違っていても良い(喜んで食べる人が一人でも存在すれば良い)のですが、(5)は同じ人がどんな食べ物でも喜んで食べないといけません。

皆さんは記号で書かれるよりは日本語で書かれた文章の方が理解しやすいと感じているかもしれませんが、日本語は読点の付き方一つで意味が変わってしまいます。それだと誤った解釈をしてしまう可能性があるので、(*)や(**)のように**論理記号を用いて書く**、そしてそれを**左から順に読んで理解する**、ということに慣れていきましょう。

3 次の極限值を求めよ（答えだけでよい）

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n) \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^{n+1} - 4^n}{2^{2n-1} + 3^n}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$$

[解答] (1)

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + n + 1} - n &= \frac{(\sqrt{n^2 + n + 1} - n)(\sqrt{n^2 + n + 1} + n)}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} \\ &= \frac{n + 1}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1} \\ &\rightarrow \frac{1 + 0}{\sqrt{1 + 0 + 0} + 1} = \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

$$(2) \frac{(-3)^{n+1} - 4^n}{2^{2n-1} + 3^n} = \frac{-3(-3)^n - 4^n}{\frac{1}{2} \cdot 4^n + 3^n} = \frac{-3\left(-\frac{3}{4}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^n} \rightarrow \frac{-3 \cdot 0 - 1}{\frac{1}{2} + 0} = \underline{-2} \quad (n \rightarrow \infty)$$

(3) 任意の $x > 0$ に対して $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$ であり, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ であるから, はさみうちの原理により $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

(4) (高校では) $\lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}} = e$ と定義した. $x \rightarrow 0$ のとき $2x \rightarrow 0$ であるので,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left((1 + 2x)^{\frac{1}{2x}} \right)^2 = \underline{e^2}.$$

注意. 上の解答では, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ ($r \in (-1, 1)$), $\lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}} = e$ やはさみうちの原理などが用いられていますが, これらを含めて数列・関数の極限に関する性質はすべて解析学 I で証明されます.

(3) の答えを 1 と書いた人は, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ とごっちゃになったのでしょうか……. また, (4) に関連して, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ も重要です.

4 次の命題 P, Q の真偽を、理由を付けて答えよ。ただし、 $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ がともに無理数であることは証明なしに用いてよい。

$P: (x \text{ が無理数, かつ } y \text{ が無理数}) \implies x + y \text{ が無理数.}$

$Q: (x \text{ が有理数, かつ } y \text{ が無理数}) \implies xy \text{ が無理数.}$

[解答]

$P: x = \sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$ とおくと、 $x \notin \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q}$ であるが、 $x + y = \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \in \mathbb{Q}$ である。

従って、命題は偽である。

$Q: x = 0, y = \sqrt{2}$ とおくと、 $x \in \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q}$ であるが、 $xy = 0 \times \sqrt{2} = 0 \in \mathbb{Q}$ である。

従って、命題は偽である。

コメント. P を正確に書くと

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x \notin \mathbb{Q} \wedge y \notin \mathbb{Q}) \implies x + y \notin \mathbb{Q}$$

ですので、これを否定すると

$$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \text{ s.t. } (x \notin \mathbb{Q} \wedge y \notin \mathbb{Q} \wedge x + y \in \mathbb{Q})$$

となります。否定命題を証明するには、 $x \notin \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q}$ かつ $x + y \in \mathbb{Q}$ となるような x, y を一組見つければ良いわけです。これが「反例を挙げる」という意味です。

しかし! 「命題が偽であることを示すには反例を挙げれば良い」というのは誤りです。全称命題が偽であることを証明するには反例を挙げれば良いのですが（全称命題の否定は存在命題になるのだから）、存在命題が偽であることを証明するのに反例を挙げたのでは意味がありません（存在命題の否定は全称命題だから）。論理の世界に身を委ねて証明を書くのにはどうしても慣れが必要ですが、一步一步前に進んでいきましょう。

Q を真だと思って「証明」を書いた方は、ご自身の「証明」を見直してみてください。 $x \neq 0$ でなければ x で割ることはできません¹。

¹平成 28 年度の大学入試センター試験（10 年前の 1 月に行われたもの）の数学 I, 数学 I・A の第 1 問 [2] (2) にこれに似た問題が出題されたのですが、そのことがもっと見えにくい形をしていて、滝本は当時「センター試験としては厳しい問題だなあ」と思った覚えがあります。