

小問について、(1), (2), ……と付いたものは小問ごとに発表して構いませんが、(a), (b), ……と付いたものはまとめて発表して下さい。

◇ 割り当て問題

問題 2.1 定義に従って次を示せ。

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$.

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

問題 2.2 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \frac{n}{2n^2-1}$ により定める。このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ を定義に従って示せ。

問題 2.3 $\{a_n\}$ は数列、 $\alpha \in \mathbb{R}$ は定数とし、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ であるとする。このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |\alpha|$ を示せ。

問題 2.4 $\{a_n\}$ は数列、 $\alpha > 0$ は定数とし、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ であるとする。このとき、

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \implies a_n > \frac{\alpha}{2})$$

を示せ。

問題 2.5 $\{a_n\}$ は $a_n > 0$ を満たす数列とする。このとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \infty$$

が成り立つことを示せ。

◇ 自由発表問題

問題 2.6 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して、次が成り立つことを示せ。

(a) $\alpha \geq 0$ かつ 「 $\forall \varepsilon > 0, \alpha < \varepsilon$ 」 が成り立つならば、 $\alpha = 0$ である。

(b) 「 $\forall \varepsilon > 0, |\alpha - \beta| < \varepsilon$ 」 が成り立つならば $\alpha = \beta$ である。

(c) 「 $\forall \varepsilon > 0, \alpha - \beta < \varepsilon$ 」 が成り立つならば $\alpha \leq \beta$ である。

問題 2.7 数列 $\{a_n\}$ が収束するならば、 $\{a_n\}$ の極限值はただ一つであることを示せ。

問題 2.8 $\{a_n\}$ は数列、 $\alpha \in \mathbb{R}$ は定数とし、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = \alpha$ であるとする。このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ を示せ。

問題 2.9 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は数列であり、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq b_n$ とする。このとき、次を示せ。

(1) $\{a_n\}, \{b_n\}$ が収束列ならば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ならば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$.

(裏面に続く)

問題 2.10 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は数列であり, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ かつ $\{b_n\}$ は下に有界であるとする. このとき, 次を示せ.

- (a) $\{a_n\}$ は下に有界である.
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$.

問題 2.11 $r \in \mathbb{R}$ とする. このとき, 次を示せ.

- (a) $r > 1$ ならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$.
- (b) $|r| < 1$ ならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$.

問題 2.12 次の極限を調べよ. ただし, $\alpha > 0$ は定数とする.

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n}$.
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$.
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n}{n!}$.

問題 2.13 $\{a_n\}$ は数列, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}$ とする. $b_n = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ により数列 $\{b_n\}$ を定義するとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$ が成り立つことを示せ.

問題 2.14 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は数列とする. $\{a_n\}$ は有界であり, $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0$ を満たすとする. このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ であることを示せ.

問題 2.15 $\{a_n\}$ は数列とする.

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \infty$ であることを示せ.
- (2) (1) の逆の命題は偽であることを示せ.

問題 2.16 $\{a_n\}$ は数列であり, 任意の 2 以上の自然数 k に対して数列 $\{a_{kn}\}$ は収束するとする. このとき, $\{a_n\}$ が必ず収束するといえるかどうか判定せよ.

問題 2.17 $f(x), g(x)$ は (実数係数の) 整式であり, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $g(n) > 0$ を満たすとする. また, ある $\ell \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f(n) \leq g(n + \ell)$ かつ $g(n) \leq f(n + \ell)$ が成り立つとする. このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$ を示せ.