

小問について、(1), (2), ……と付いたものは小問ごとに発表して構いませんが、(a), (b), ……と付いたものはまとめて発表してください。

◇ 割り当て問題

問題 1.1 $A = \left\{ \frac{3n-1}{2n-5} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ とおく。次を示せ。

- (a) $-\sqrt{29}$ は A の下界である。 (b) -2 は A の下界ではない。 (c) A は上に有界である。

問題 1.2 (a) 命題「 $x \in \mathbb{Q}$ かつ $y \in \mathbb{Q} \implies x + y \in \mathbb{Q}$ 」の真偽を判定せよ。

- (b) \mathbb{Q} の最大値は存在しないことを示せ。

問題 1.3 $A = (1, 2] \cup (3, 4]$ とおく。 $\inf A$ および $\min A$ を (存在すれば) 求めよ¹。

問題 1.4 A を空でない \mathbb{R} の部分集合, $a \in \mathbb{R}$ とする。次の命題の真偽を, 理由を付けて答えよ²。

- (a) 「任意の $x \in A$ に対して $x \leq a$ である」を満たすならば, $\sup A \leq a$ である。
 (b) 「任意の $x \in A$ に対して $x < a$ である」を満たすならば, $\sup A < a$ である。

問題 1.5 A, B を空でない \mathbb{R} の部分集合とし, B は上に有界であり, かつ $A \subset B$ であると仮定する。このとき, A も上に有界であり, $\sup A \leq \sup B$ であることを示せ。

◇ 自由発表問題

問題 1.6 集合 A, B を $A = \left\{ \frac{2}{2n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$, $B = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ と定める。次の各命題が真であるか偽であるかを, 理由を付けて答えよ。

- (a) 任意の $a \in A$ と任意の $b \in B$ に対して, $a < b$ である。
 (b) 任意の $a \in A$ に対して, ある $b \in B$ が存在して $a > b$ となる。
 (c) ある $a \in A$ が存在して, 任意の $b \in B$ に対して $a \leq b$ である。
 (d) ある $b \in B$ が存在して, 任意の $a \in A$ に対して $a \leq b$ である。

問題 1.7 A を空でない \mathbb{R} の部分集合とする。次の (i) と (ii) が同値であることを示せ。

- (i) A は有界である。(即ち, A は上に有界かつ下に有界である)
 (ii) $\exists M \in \mathbb{R}$ s.t. $\forall x \in A, |x| \leq M$.

問題 1.8 A を空でない \mathbb{R} の部分集合とする。

- (1) A の最大値は存在すれば一意であることを示せ³。
 (2) A の上限は存在すれば一意であることを示せ。

(裏面に続く)

¹講義で学んだ事実を使うことは構いません。

²「理由を付けて」というのは、「真であれば成り立つことを証明(説明)し, 偽であれば成り立たないことを証明(説明)する」という意味です。

³即ち, m, m' が共に A の最大値であるならば $m = m'$ であることを示せ, という事です。

問題 1.9 次の集合が, (i) 有界である, (ii) 上に有界であるが, 下に有界でない, (iii) 下に有界であるが, 上に有界でない, (iv) 上に有界でなく, かつ下に有界でない, のいずれであるかを, 理由を付けて答えよ⁴.

$$(1) A = \left\{ \frac{1}{x^2 + 2x + 3} \mid x \in \mathbb{R} \right\}. \quad (2) B = \{x^2 - 3 \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

$$(3) C = \{p^2 - 3 \mid p \in \mathbb{N}\}. \quad (4) D = \{3^n - 2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

$$(5) E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^9 - 6x^8 + 5x - 1 \leq 0\}$$

(ヒント: $x > 6$ ならば $x^9 - 6x^8 + 5x - 1 > 0$ であることを示す)

問題 1.10 $A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ とおく.

(1) A の最大値および上限を (存在するならば) 求めよ.

(2) A の最小値および下限を (存在するならば) 求めよ.

問題 1.11 (1) $A = \left\{ \frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ とおく. A の上限と下限を求めよ.

(2) $B = \left\{ \frac{1}{2^m} - \frac{1}{4^n} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}$ とおく. B の上限と下限を求めよ.

問題 1.12 \mathbb{R} の空でない部分集合 A, B と $k \in \mathbb{R}$ に対して

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}, \quad kA = \{ka \mid a \in A\}$$

と定義する. 例えば, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ ならば, $2A = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$ である.

A, B が上に有界であるとき, 次が成り立つことを示せ.

$$(1) \sup(A + B) = \sup A + \sup B. \quad (2) \sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

$$(3) k \geq 0 \text{ ならば, } \sup(kA) = k \sup A. \quad (4) k < 0 \text{ ならば, } \inf(kA) = k \sup A.$$

問題 1.13 $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ とおく. A は上限をもつが最大値をもたないことを示し, $a = \sup A$ とおくと, $a > 0$ かつ $a^2 = 2$ を満たすことを示せ⁵.

問題 1.14 (無理数の稠密性) 任意の $a < b$ を満たす $a, b \in \mathbb{R}$ に対して, $a < q < b$ を満たす無理数 $q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ が存在することを示せ.

⁴ イメージや関数のグラフを書くだけでは不十分です. もちろん, 講義で学ぶ定理・命題を用いることは構いません (例えば, \mathbb{N} が上に有界でないことやガウス記号などを 6/11 の講義で学習することでしょう).

⁵ 「 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ だから」では証明になりません. この問題により「 $\sqrt{2}$ ($a > 0$ かつ $a^2 = 2$ を満たす実数 a) の存在」が証明されます.