解析学 III 演習　小テスト No.1　解答　　（2025.6.23 出題）

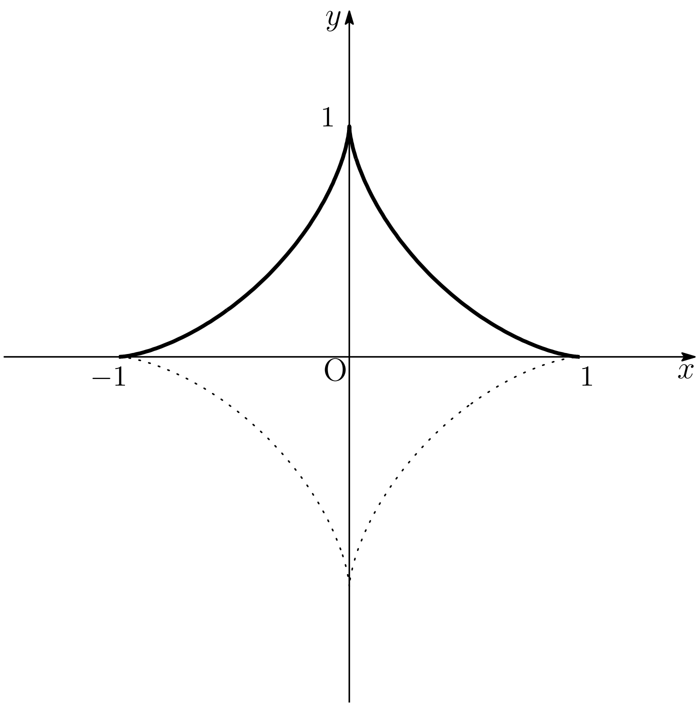
$\boxed{\mathbf{1}}$ 配点は 10 点です。**問題 1-1**，**問題 1-2** の類題です．

［解答］ $x = \varphi(\theta) = \cos^3\theta$, $y = \psi(\theta) = \sin^3\theta$ はともに $[0, \pi]$ 上で C^1 級関数であるから，曲線 C は長さをもつ．その長さ $\ell(C)$ は

$$\begin{aligned}
\ell(C) &= \int_0^{\pi} \sqrt{(\varphi'(\theta))^2 + (\psi'(\theta))^2}\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \sqrt{(-3\cos^2\theta\sin\theta)^2 + (3\sin^2\theta\cos\theta)^2}\, d\theta \\
&= 3\int_0^{\pi} \sin\theta|\cos\theta|\, d\theta \\
&= 3\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\, d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\sin\theta\cos\theta)\, d\theta\right) \\
&= 3\left(\left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) = \underline{\ 3\ }.
\end{aligned}$$

注意. 計算の途中で，平方根を外す際に絶対値を付け忘れて $3\int_0^{\pi} \sin\theta\cos\theta\, d\theta$ とした人が多かったです（そのまま計算すると積分値は 0 になっておかしいことになりますね）.

注意. この問題の曲線 C は**アステロイド（星芒形）**と呼ばれる曲線の上半分（図の太線の部分）です.



$\boxed{\mathbf{2}}$ 配点は 3 点 + 7 点です．(2) は**問題 2-4** の類題ですが，ほとんど同じです．

(1) **［解答］** $\underline{\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall x \in A \ \big(n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\big)}$ です．今回は減点しませんでしたが，カッコは必要ですので書いてください．記述の仕方はこれ以外にもいろいろあります．

(2) **［証明］** 任意に $\varepsilon > 0$ を取る．$f(x)$ が $\mathbb{R}$ 上で一様連続であるので，

$$\exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x, y \in \mathbb{R}, \ \big(|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon\big)$$

が成り立つ．この δ に対して，$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ であるので，

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \implies |a_n| < \frac{\delta}{2}$$

が成り立つ．この N に対して，任意に $x \in \mathbb{R}$ を取ると，$n \geq N$ ならば，$\big|(x - 2a_n) - x\big| = 2|a_n| < 2 \cdot \dfrac{\delta}{2} = \delta$ であるから

$$|g_n(x) - f(x)| = \big|f(x - 2a_n) - f(x)\big| < \varepsilon$$

を得る．故に，関数列 $\{g_n(x)\}$ は $f(x)$ に $\mathbb{R}$ 上で一様収束する． ■