解析学 III 演習　演習問題 No.6　　（2025.6.26 配布）

小問について，(1), (2), ……と付いたものは小問ごとに発表して構いませんが，(a), (b), ……と付いたものはまとめて発表してください．

◇ 割り当て問題

問題 6-1 「$\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ が $\mathbb{R}^n$ のコーシー列であるならば，$\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ は有界である」ことを，$\mathbb{R}^n$ の完備性を使わず**コーシー列の定義に従って**示せ．

問題 6-2 $\mathbb{R}^n$ の空でない部分集合 A に対して，$\operatorname{diam} A = \sup\{d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \mid \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in A\}$（集合 A の**直径**）と定める．ただし，右辺の sup が存在しないときは $\operatorname{diam} A = \infty$ と定める．

このとき,「A が有界である $\iff$ $\operatorname{diam} A$ が有限値である（即ち，$\operatorname{diam} A = \infty$ ではない）」を示せ．

問題 6-3 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ とする．このとき，$U(\boldsymbol{x}; \varepsilon)$ は弧状連結であることを示せ．

（注意：「図より」はダメです！）

問題 6-4 A と B を $\mathbb{R}^n$ の弧状連結な部分集合とする．もし $A \cap B \neq \emptyset$ ならば，$A \cup B$ は弧状連結であることを示せ．

◇ 自由発表問題

問題 6-5 $A \subset \mathbb{R}^n$ とする．

(1) 「A が閉集合 $\iff$ $A^c \cap \partial A = \emptyset$」を示せ．
(2) 「A が閉集合 $\iff$ $A \subset \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{x}$ は A の集積点 $\}$」を示せ．

問題 6-6 $A \subset \mathbb{R}^n$ とする．このとき，次の (i) と (ii) が同値であることを示せ．

(i) A は有界閉集合である．
(ii) **（点列コンパクト性）** A の点からなる任意の点列は，必ず A の点に収束する部分列を含む．

（注意：数学通論 I で学んだように，(i) は「(iii) **（コンパクト性）** A の任意の開被覆は，必ず A の有限被覆を部分集合として含む」とも同値である）

問題 6-7 $\mathbb{R}^n$ の空でない部分集合 A に対して，$\operatorname{diam} A$ を A の直径とする（**問題 6-2** を参照）．

(a) もし A が有界であるならば，$\overline{A}$ も有界であることを示せ．
(b) もし A が有界であるならば，$\operatorname{diam} A = \operatorname{diam} \overline{A}$ であることを示せ．

問題 6-8 $A \subset \mathbb{R}^n$ とする．もし A が連結であるならば，$\overline{A}$ も連結であることを示せ．

問題 6-9 $\mathbb{R}^2$ から可算個の点を除いた集合は弧状連結であることを示せ．

（注意：$\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ でも同様のことが成立する）