

小問について, (1), (2), ……と付いたものは小問ごとに発表して構いませんが, (a), (b), ……と付いたものはまとめて発表してください.

◇ 割り当て問題

問題 5-1 収束半径が 0 であるべき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ を一つ挙げよ. 理由も付けること.

問題 5-2 (a) べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ の収束半径 R を求めよ.

(b) $x \in (-R, R)$ に対し, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$ とおく. $f(x)$ を求めよ. (ヒント: 項別積分)

問題 5-3 (a) べき級数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)n}$ の収束半径 R を求めよ. (以下, $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)n}$ とおく.)

(b) $x \in (-R, R)$ に対し, 項別微分により $f'(x)$ を求めよ. さらに, それを用いて $f(x)$ を求めよ.

(c) (b) を用いて, 級数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)n} = \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} - \dots$ の和を求めよ. (ヒント: アーベルの定理)

問題 5-4 べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を r , $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ の収束半径を R とする.

もし r, R がともに実数で $r < R$ であるならば, $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ の収束半径は r であることを示せ¹.

◇ 自由発表問題

問題 5-5 前問 (問題 5-4) において, もし r, R がともに実数で $r = R$ であるならば, $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ の収束半径は $r (= R)$ よりも大きくなることがある. そのような例を挙げよ. ただし, 「 ∞ は実数 r より大きい」と定める.

問題 5-6 $\{a_n\}$ は有界列であり, 発散すると仮定する. このとき, $\{a_n\}$ の二つの部分列 $\{a_{m_k}\}$, $\{a_{n_k}\}$ と二つの実数 β, γ が存在して, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{m_k} = \beta$, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \gamma$ かつ $\beta \neq \gamma$ であることを示せ.

(裏面に続く)

¹ **要注意!** 「 $|x| < r$ なる任意の x で $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ が収束する」ことを示すだけでは答案として不十分です!!
これだけでは, $|x| > r$ で発散しているかが分からないため, 収束半径が r であると言えます. 「 $|x| > r$ なる任意の x で $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ が発散する」ことも示す必要があります.

問題 5-7 ベキ級数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} x^{2n+2}$ の収束半径 R を求めよ。さらに, $x \in (-R, R)$ に対し, 項別微分を利用して $f''(x)$ を求め, さらにそれを用いて $f(x)$ を求めよ。

問題 5-8 (1) ベキ級数の項別積分を用いて, $\arctan x$ の $x = 0$ の周りでのテイラー級数展開を求めよ²。また, その級数展開 (ベキ級数) の収束半径を求めよ。

(2) アーベルの定理を用いて級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ の和を求めよ。

(3) (1) のベキ級数を項別積分することにより, 次の等式を証明せよ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1) \cdot 2n \cdot 3^n} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 3^2} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 3^3} - \frac{1}{7 \cdot 8 \cdot 3^4} + \cdots = \frac{\pi}{6\sqrt{3}} - \log \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

問題 5-9 ベキ級数の理論を用いて, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} = \frac{1}{1 \cdot 1} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{4 \cdot 7} + \cdots$ の和を求めよ。

問題 5-10 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ に対し, ベキ級数 $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ を

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n \cdot (\beta)_n}{(\gamma)_n \cdot n!} x^n$$

と定める³。ただし, $r \in \mathbb{R}$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して $(r)_n = r(r+1) \cdots (r+n-1)$, $(r)_0 = 1$ とする。

(1) $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ の収束半径 R を求めよ。

(2) 記号を簡単にするため $f(x) = F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ と書く。このとき, 次を示せ⁴。

$$x(1-x)f''(x) + \{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x\}f'(x) - \alpha\beta f(x) = 0 \quad (x \in (-R, R)).$$

² ヒント: $f(x) = \arctan x$ の導関数 $f'(x)$ は? さらに, 和が $f'(x)$ に一致する無限等比級数は?

³ ベキ級数 $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ はガウスの超幾何級数と呼ばれます。

⁴ この微分方程式はガウスの超幾何微分方程式と呼ばれます。