

小問について、(1), (2), ……と付いたものは小問ごとに発表して構いませんが, (a), (b), ……と付いたものはまとめて発表してください。

◇ 割り当て問題

問題 4-1 関数項級数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} x^n$ は閉区間 $[-1, 1]$ 上で一様収束することを示し, さらに $f(x)$ は $[-1, 1]$ 上で連続であることを示せ。

(ヒント: ワイエルシュトラスの M-test を用います. 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ は収束しますね.)

問題 4-2 関数項級数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{1+x^n}$ は閉区間 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 上で一様収束することを示し, さらに $f(x)$ は $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 上で連続であることを示せ。

問題 4-3 (a) 関数項級数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin nx}{3^n}$ は $[0, \pi]$ 上で一様収束することを証明せよ¹。

(b) (a) の $f(x)$ に対して, 定積分 $\int_0^{\pi} f(x) dx$ の値を求めよ。(ヒント: 項別積分)

問題 4-4 関数項級数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ が $\mathbb{R}$ 上で C^1 級であることを示せ。(ヒント: 項別微分)

問題 4-5 べき級数 (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$ と (b) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n^2} x^n$ の収束半径を求めよ。

問題 4-6 べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は $x = x_0$ で発散し, かつ数列 $\{a_n x_0^n\}_{n=0}^{\infty}$ は有界であるとする。このとき, べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径は $|x_0|$ であることを示せ。(ヒント: アーベルの補題)

問題 4-7 $a_n = \sin \frac{n\pi}{3}$, $b_n = \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{3}$ とおく。数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の上極限をそれぞれ求めよ。

問題 4-8 $\{a_n\}$ を有界な数列, $k > 0$ を定数とする。このとき, 次を示せ。

$$(a) \limsup_{n \rightarrow \infty} (ka_n) = k \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n. \quad (b) \limsup_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = -\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

問題 4-9 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が有界な数列であるとき, $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$ を示せ。また, この不等式の $\leq$ を $=$ にすることはできないが, 反例を一組挙げよ。

◇ 自由発表問題

問題 4-10 次の関数項級数が $\mathbb{R}$ 上で連続であることを示せ。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx^3)}{2^n + x^2}. \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^3}{n^4 + x^4}. \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n} - \sin \frac{x}{n} \right).$$

(裏面に続く)

¹級数に関するダランベールの判定法 (解析学 I で学んだはず) を使うと良いでしょう。

問題 4-11 (フーリエ級数) 実数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し, 関数項級数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

が $[0, 2\pi]$ 上で一様収束しているとする. このとき, 次を示せ.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, \dots), \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

問題 4-12 次の関数項級数が区間 I 上で C^1 級であることを示せ.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{x}{n}, \quad I = \mathbb{R}. \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx^2)}{n^3}, \quad I = \mathbb{R}. \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, \quad I = (1, \infty).$$

問題 4-13 次のべき級数の収束半径 R を求めよ. さらに, R が有限値である場合は $x = R$ および $x = -R$ において級数が収束するか否かをそれぞれ判定せよ. (一人 1 問まで)

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) x^n. \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+1} \right)^{n^2} x^n. \quad (3) \sum_{n=0}^{\infty} n^{\log n} x^n. \quad (4) \sum_{n=0}^{\infty} x^{n!}.$$

$$(5) \sum_{n=0}^{\infty} (1+a^n) x^{2n}, \text{ ただし } a > 0 \text{ は定数.} \quad (6) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \text{ ただし } a_n = \begin{cases} 2^n & (n \text{ が奇数のとき}) \\ 3^n & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}.$$

問題 4-14 べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径が R であるとき, べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ の収束半径は $\sqrt{R}$ であることを示せ. ただし, $R = \infty$ のときは, $\sqrt{R} = \infty$ と定める.

問題 4-15 次の数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の上極限・下極限をそれぞれ求めよ.

$$a_n = (-1)^n + \frac{1}{n},$$

$$\{b_n\} : \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \dots \right\} \text{ で定まる数列.}$$

問題 4-16 上に有界な数列 $\{a_n\}$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して, 次の二つの条件が同値であることを示せ.

$$(i) \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha.$$

$$(ii) X = \left\{ \beta \in \mathbb{R} \mid \text{ある部分列 } \{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \text{ が存在して } \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \beta \right\} \text{ とおくとき, } \alpha = \max X.$$

(即ち, α は $\{a_n\}$ の収束する部分列の極限として現れる数の最大値である)

問題 4-17 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を有界な数列であるとする.

(1) $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ を示せ. また, このことと **問題 4-9** の結果 (および講義で学習した内容) を併せて, $\{a_n\}$ が収束するならば $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$ が成立することを示せ.

(2) $a_n \geq 0, b_n \geq 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) であり, $\{a_n\}$ が収束すると仮定する. このとき, $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$ が成立することを示せ.

問題 4-18 $f(x)$ を閉区間 $[a, b]$ 上で連続な関数であるとする. このとき, 次を示せ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b |f(x)|^n \, dx \right)^{\frac{1}{n}} = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$