

小問について、(1), (2), ……と付いたものは小問ごとに発表して構いませんが、(a), (b), ……と付いたものはまとめて発表してください。

◇ 割り当て問題

問題 3-1 $f_n(x) = 2n^2 x e^{-n^2 x^2}$ ($x \in [0, 1]$) とおく。

- (a) $[0, 1]$ 上の関数列 $\{f_n(x)\}$ の極限関数 $f(x)$ を求めよ。 ($x = 0$ と $x \in (0, 1]$ で場合分けが必要)
 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ と $\int_0^1 f(x) dx$ を計算せよ。
 (c) (a), (b) の結果が示唆する事実を述べよ。

問題 3-2 $f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}$, $f(x) = 0$ ($x \in \mathbb{R}$) とおく。

- (a) $\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に $\mathbb{R}$ 上で一様収束することを示せ。
 (b) $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) を求めよ。また、 $g(x) = f'(x)$ ($\forall x \in \mathbb{R}$) は成立するか？
 (c) (a), (b) の結果が示唆する事実を述べよ。

問題 3-3 次の二つを共に満たす $[0, 1]$ 上の連続関数列 $\{f_n(x)\}$ の例を挙げよ。

- (i) 任意の $x \in [0, 1]$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \infty$.

(注意：6/11 の講義で挙げた例は (i) は満たしますが $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{4}$ でした。少し変えれば……)

問題 3-4 $\{f_n(x)\}$ を $[a, b]$ 上の連続関数列、 $f(x)$ を $[a, b]$ 上の連続関数とする。次の命題の真偽を判定せよ。

$\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に $[a, b]$ 上で各点収束し、かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ が成立すると仮定する。このとき、 $\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に $[a, b]$ 上で一様収束する。

問題 3-5 $I \subset \mathbb{R}$ を区間、 $\{f_n(x)\}$ を I 上の C^2 級関数列、 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ を I 上の関数とする。もし $\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に I 上で各点収束し、 $\{f_n'(x)\}$ は $g(x)$ に I 上で各点収束し、 $\{f_n''(x)\}$ は $h(x)$ に I 上で一様収束するならば、 $f \in C^2(I)$ であり、 $f''(x) = h(x)$ ($\forall x \in I$)であることを示せ。(注意：一般に k 階導関数についても同様の結果が成り立ちます)

問題 3-6 関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ が $(-1, 1)$ 上で一様収束しないことを、定義に従って示せ。

問題 3-7 関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^{n-1}}$ は $[0, \infty)$ 上で一様収束しないことを示せ。

(ヒント：関数項級数の和は実際に計算できます。 $[0, \infty)$ 上で一様収束すると仮定すると……)

問題 3-8 前問 (問題 3-7) の関数項級数が $(0, \infty)$ 上で広義一様収束するか否かを判定せよ。

(裏面に続く)

◇ 自由発表問題

問題 3-9 $p > 0$ とし, $f_n(x) = n^p x e^{-nx^2}$, $f(x) \equiv 0$ ($x \in [0, 1]$) とおく.

- (1) 関数列 $\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に $[0, 1]$ 上で各点収束することを示せ.
- (2) 関数列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に $[0, 1]$ 上で一様収束するような p の範囲を求めよ.

問題 3-10 半開区間 $(a, b]$ 上の連続関数列 $\{f_n(x)\}$ が, $(a, b]$ 上の関数 $f(x)$ に一様収束し, かつ任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n(x)$ は $(a, b]$ 上で広義積分可能であると仮定する. このとき, $f(x)$ も $(a, b]$ 上で広義積分可能であり, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ が成り立つことを示せ.

(注意: レポート問題 No.2 **問3** (2) にあるように, 無限区間上の広義積分では一般に成り立ちません.)

問題 3-11 $[a, \infty)$ 上の連続関数列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に $[a, \infty)$ 上で広義一様収束し, さらに次の (i), (ii) を満たす $[a, \infty)$ 上の連続関数 $g(x)$ が存在すると仮定する:

- (i) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, \infty), |f_n(x)| \leq g(x)$.
- (ii) 広義積分 $\int_a^\infty g(x) dx$ は収束する.

このとき, 広義積分 $\int_a^\infty f(x) dx$ は収束し, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^\infty f_n(x) dx = \int_a^\infty f(x) dx$ が成り立つことを示せ.

問題 3-12 閉区間 $[a, b]$ 上でリーマン積分可能な関数列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に $[a, b]$ 上で一様収束すると仮定する. このとき, $f(x)$ は $[a, b]$ 上でリーマン積分可能であることを示せ.

(注意: このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ が成立します. 証明は講義で述べた「極限と積分の順序交換」の定理と全く同じです.)

問題 3-13 関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^3(1-x^2)^{n-1}$ が (a) 収束するような x の範囲 I を求め, (b) I 上で一様収束するか否かを判定し, (c) I 上で広義一様収束するか否かを判定せよ.

問題 3-14 恒等式 $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + \frac{(-1)^n}{1+t}t^n$ ($n \in \mathbb{N}, t \in [0, 1]$) を示し, これを用いて関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ が $\log(1+x)$ に $[0, 1]$ 上で一様収束することを示せ.
(ヒント: 恒等式を t について 0 から x まで積分する)

問題 3-15 $f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{x+n}$ ($x \in [0, \infty)$) とする.

- (a) 関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は $[0, \infty)$ 上で一様収束することを示せ.
- (b) 任意の $x \in [0, \infty)$ に対して, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ は発散することを示せ.