解析学 III 演習　演習問題 No.2　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（2025.6.9 配布）

小問について，(1), (2), ……と付いたものは小問ごとに発表して構いませんが，(a), (b), ……と付いたものはまとめて発表してください．

◇ 割り当て問題

問題 2-1 $A \subset \mathbb{R}$ を空でない集合，$\{f_n(x)\}$ を A 上の関数列，$f(x)$ を A 上の関数とするとき，次の (a), (b) の命題の真偽を判定せよ．

(a) $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に A 上で一様収束するならば，$\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に A 上で各点収束する．
(b) $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に A 上で各点収束するならば，$\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に A 上で一様収束する．

問題 2-2 $f_n(x) = x^n(1-x)^n \ \big(x \in (0,1)\big)$ とおく．このとき，(a) 極限関数 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求め，(b) 関数列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に $(0,1)$ 上で一様収束するかどうかを**定義に従って**調べよ．

問題 2-3 $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2} \ \big(x \in [0,1]\big)$ を考える．このとき，(a) 極限関数 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求め，(b) 関数列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に $[0,1]$ 上で一様収束するかどうかを**定義に従って**調べよ．
（注意：(a) では $x=0$ と $x \in (0,1]$ で場合分けが必要である）

問題 2-4 $f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上で一様連続な関数とし，$\{a_n\}$ を $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を満たす数列とする．$\mathbb{R}$ 上の関数列 $\{g_n(x)\}$ を $g_n(x) = f(x+a_n)$ で定めるとき，$\{g_n(x)\}$ は $f(x)$ に $\mathbb{R}$ 上で一様収束することを示せ．

問題 2-5 $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx} \ \big(x \in [0,\infty)\big)$ を考える．このとき，(a) 極限関数 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求め，(b) 関数列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に $[0,\infty)$ 上で一様収束するかどうかを判定せよ．
（この問題の (b) については，定義通りに示しても講義で学んだ性質を用いて示しても良い）

問題 2-6 $f_n(x) = x^n - x^{n+1} \ \big(x \in [0,1]\big)$ を考える．このとき，(a) 関数 $f_n(x)$ の最大値と最小値を求め，(b) 関数列 $\{f_n(x)\}$ が $[0,1]$ 上で一様収束するかどうかを判定せよ．

問題 2-7 次の (a), (b) の各命題について，反例となる関数列 $\{f_n(x)\}$ をそれぞれ挙げよ．
（講義・レポート問題・演習問題にある関数列を用いてよい）

(a) $\{f_n(x)\}$ を $[0,1]$ 上の連続関数列とする．もし $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に $[0,1]$ 上で各点収束し，かつ $f(x)$ が $[0,1]$ 上で連続ならば，$\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に $[0,1]$ 上で一様収束する．
(b) $\{f_n(x)\}$ を $[0,1]$ 上の単調増加な（または，単調減少な）連続関数列とする．もし $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に $[0,1]$ 上で各点収束するならば，$\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に $[0,1]$ 上で一様収束する．

問題 2-8 $f_n(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^n} \ (x \in (0,\infty))$ を考える．関数列 $\{f_n(x)\}$ は $(0,\infty)$ 上で**一様収束しない**が，$(0,\infty)$ 上で**広義一様収束する**ことを示せ．

◇ 自由発表問題

問題 2-9 $f(x)$ は $[0,\infty)$ 上の連続関数で，$f(0)=0$ かつ $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ を満たすと仮定する．$[0,\infty)$ 上の関数列 $\{g_n(x)\}$ を $g_n(x) = f(nx)f\left(\dfrac{x}{n}\right)$ で定めるとき，$\{g_n(x)\}$ は $[0,\infty)$ 上で一様収束することを示せ．

（裏面に続く）

問題 2-10 $A \subset \mathbb{R}$ を空でない集合，$\{f_n(x)\}$ を A 上の関数列，$f(x), g(x)$ を A 上の関数とする．

(a) $f(x), g(x)$ が A 上で有界であるならば，$\left| \sup_{x \in A} |f(x)| - \sup_{x \in A} |g(x)| \right| \leq \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|$ が成り立つことを示せ．

(b) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n(x)$ は A 上で有界であると仮定する．このとき，もし $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に A 上で一様収束するならば，$f(x)$ は A 上で有界であり，かつ $\lim_{n \to \infty} \left(\sup_{x \in A} |f_n(x)| \right) = \sup_{x \in A} |f(x)|$ であることを示せ．

問題 2-11 $[0,1]$ 上の関数 $f(x)$ は次の二つの性質を満たすと仮定する．

(i) $\forall x \in [0,1]$, $0 \leq f(x) \leq 1$.

(ii) $\exists c \in (0,1)$ s.t. $\forall x,\ \forall y \in [0,1]$, $|f(x) - f(y)| \leq c|x-y|$.

いま，$[0,1]$ 上の関数列 $\{g_n(x)\}$ を

$$g_1(x) = f(x), \quad g_{n+1}(x) = f\bigl(g_n(x)\bigr) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

により定義するとき，$\{g_n(x)\}$ は（ある関数に）$[0,1]$ 上で一様収束することを示せ．
（ヒント：コーシーの判定法を用いる）

問題 2-12 次で定義される区間 I 上の関数列 $\{f_n(x)\}$ が I 上で一様収束するかどうかを調べよ．講義で学んだ性質を用いても良い．**（一人 1 問まで）**

(1) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1 + x^{2n}}$, $I = \mathbb{R}$.　　(2) $f_n(x) = nx(1-x)^n$, $I = [0,1]$.

(3) $f_n(x) = n \sin \dfrac{x}{n}$, $I = \mathbb{R}$.

問題 2-13 区間 I 上の連続関数列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に I 上で一様収束し，I 内の数列 $\{a_n\}$ が $\alpha \in I$ に収束すると仮定する．このとき，次を示せ．

$$\lim_{n \to \infty} f_n(a_n) = f(\alpha).$$

（ヒント 1：連続関数列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に I 上で一様収束しているのだから，$f(x)$ は I 上で○○ですね．
ヒント 2：$|f_n(a_n) - f(\alpha)| = \bigl|(f_n(a_n) - f(a_n)) + (f(a_n) - f(\alpha))\bigr|$
$\leq |f_n(a_n) - f(a_n)| + |f(a_n) - f(\alpha)| < \cdots\cdots$）

問題 2-14 次の命題の真偽を判定せよ．

> 区間 I 上の関数列 $\{f_n(x)\}$ と I 上の関数 $f(x)$ が「I 内の数列 $\{a_n\}$ が $\alpha \in I$ に収束するならば，必ず $\lim_{n \to \infty} f_n(a_n) = f(\alpha)$ が成り立つ.」を満たすと仮定する．このとき，$\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に I 上で一様収束する．

問題 2-15（ディニの定理） $\{f_n(x)\}$ を閉区間 $[a,b]$ 上の単調増加な（または，単調減少な）連続関数列とする．もし $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に $[a,b]$ 上で各点収束し，かつ $f(x)$ が $[a,b]$ 上で連続ならば，$\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に $[a,b]$ 上で一様収束することを示せ．
（注意：**問題 2-7** の結果により，連続関数列 $\{f_n(x)\}$ の単調性の仮定も，極限関数 $f(x)$ の連続性の仮定も，どちらも落とすことができないことが分かります.）

問題 2-16 $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}$ $(x \in (0, \infty))$ を考える．関数列 $\{f_n(x)\}$ は $(0, \infty)$ 上で**一様収束しない**が，$(0, \infty)$ 上で**広義一様収束する**ことを示せ．（注意：**問題 2-3** とは定義域が異なります）