

小問について、(1), (2), ……と付いたものは小問ごとに発表して構いませんが、(a), (b), ……と付いたものはまとめて発表してください。

◇ 自由発表問題

Def. $C : x = \varphi(t), y = \psi(t)$ ($t \in [a, b]$) を連続曲線とする. $[a, b]$ の分割 $\Delta : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ に対し, $P_k = (\varphi(t_k), \psi(t_k))$ とおき, $L_\Delta = \sum_{k=1}^n \overline{P_{k-1}P_k}$ ($\overline{P_{k-1}P_k}$ は線分 $P_{k-1}P_k$ の長さ) と定める. もし $\ell(C) = \sup\{L_\Delta \mid \Delta \text{ は } [a, b] \text{ の分割}\}$ が存在するとき, C は長さをもつといい, $\ell(C)$ を C の長さという.

Th. $C : x = \varphi(t), y = \psi(t)$ ($t \in [a, b]$) が C^1 級曲線である (即ち, $\varphi, \psi \in C^1([a, b])$ である) ならば, C は長さをもち, $\ell(C) = \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt$ である.

※ $f \in C^1([a, b])$ のときの曲線 $y = f(x)$ ($x \in [a, b]$) の長さや, $g \in C^1([\alpha, \beta])$ のときの極方程式 $r = g(\theta)$ ($\theta \in [\alpha, \beta]$) で表される曲線の長さについては, 解析学 II の講義ノートまたは教科書を参照のこと.

問題 1-1 $a > 0$ を定数とする. 次の二つの曲線について, それぞれ概形を描き, 曲線の長さを求めよ¹.

$$C_1 : y = \frac{1}{2}x^2 \quad (x \in [-a, a]) \text{ のグラフ}, \quad C_2 : r = a\theta \quad (\theta \in [0, 4\pi]) \text{ のグラフ}^2.$$

問題 1-2 $a > 0$ を定数とする. 次の二つの曲線について, それぞれ概形を描き, 曲線の長さを求めよ.

$$C_3 : \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \text{ で表される曲線}, \quad C_4 : r = a(1 + \cos \theta) \quad (\theta \in [0, 2\pi]) \text{ のグラフ}^3.$$

問題 1-3 $\varphi(t), \psi(t)$ が共に $[a, b]$ 上の連続な単調増加関数, または $[a, b]$ 上の連続な単調減少関数であるとする. このとき, 曲線 $C : x = \varphi(t), y = \psi(t)$ ($t \in [a, b]$) は長さをもつことを示せ.

問題 1-4 $a < c < b$ とする. $C_1 : x = \varphi_1(t), y = \psi_1(t)$ ($t \in [a, c]$), $C_2 : x = \varphi_2(t), y = \psi_2(t)$ ($t \in [c, b]$) をそれぞれ長さをもつ連続曲線で, $\varphi_1(c) = \varphi_2(c), \psi_1(c) = \psi_2(c)$ を満たすとする. 曲線 C_1 の長さを L_1 , C_2 の長さを L_2 とおく.

このとき, $C : x = \begin{cases} \varphi_1(t) & (t \in [a, c]) \\ \varphi_2(t) & (t \in (c, b]) \end{cases}, y = \begin{cases} \psi_1(t) & (t \in [a, c]) \\ \psi_2(t) & (t \in (c, b]) \end{cases}$ で定義される連続曲線 C は長さをもち, その長さを L とすると $L = L_1 + L_2$ であることを証明せよ⁴.

(裏面に続く)

¹概形については説明不要です (例えば, コンピュータで描かせても構いません) が, 曲線の長さについては導出過程を明記してください. **問題 1-2** も同様です.

²アルキメデスの渦巻線と呼びます. 私の手元にある高校の教科書 (東京書籍「数学 III」) にも載っています.

³カージオイド (心臓形) と呼びます. これも高校の教科書 (東京書籍「数学 III」) に載っています.

⁴ C が連続曲線であることは証明しなくても構いません. C は C_1 と C_2 をつなげた曲線なわけですが, 仮定より C_1 の終点と C_2 の始点が一致しているのですから, C は連続的につながっていますよね.

問題 1-5 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & (x \in (0, 1]) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ とおき, $y = f(x)$ ($x \in [0, 1]$) のグラフで表される連続曲線 C を考える.

(1) 2 以上の自然数 N に対し, $t_k = \frac{2}{(2(N-k)-1)\pi}$ ($k = 1, 2, \dots, N-1$) とおき, $[0, 1]$ の分割 $\Delta_N : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = 1$ を定める⁵. このとき, $P_k = (t_k, f(t_k))$, $L_{\Delta_N} = \sum_{k=1}^N \overline{P_{k-1}P_k}$ とおくとき, $L_{\Delta_N} \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{2k-1}$ であることを示せ.

(2) (1) の結果を用いて, C は長さをもたないことを示せ.

問題 1-6 $C : x = \varphi(t), y = \psi(t)$ ($t \in [a, b]$) を C^1 級曲線, $h : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ を C^1 級関数で $h(\alpha) = a, h(\beta) = b, h'(s) > 0$ ($\forall s \in [\alpha, \beta]$) を満たすものとする.

このとき, C' を $C' : x = \varphi(h(s)), y = \psi(h(s))$ ($s \in [\alpha, \beta]$) で定まる C^1 級曲線とすると, $\ell(C) = \ell(C')$ であることを示せ⁶.

⁵ Δ_N は $[0, 1]$ の N 等分割ではないことに注意!

⁶連続曲線が「長さをもつ」ことや曲線の長さは曲線のパラメータ付けを変えても不変であることが示せるのですが, この問題は C^1 級曲線のパラメータを C^1 級関数で変換した場合にそのことを示せというものです.