第 4 章

線型リー群に付随する線型リー代数

第 3 章では, 線型リー群 G に対して, 付随する線型空間 $\mathrm{Lie}(G)$ を定義し, 指数写像 $\exp : \mathrm{Lie}(G) \to G$ が局所的には同相写像を与えることを示した. この章では, これらの結果を用いて, 次の二つの定理を示す:

- ∘ G が線型リー群ならば $\mathrm{Lie}(G)$ は線型リー代数である (4.1 節),
- ∘ 二つの線型リー群が局所同型であるための必要十分条件は, 付随する線型リー代数が同型となることである (4.2 節).

後者は, 線型リー群と線型リー代数の対応における基本定理とも言うべき重要な定理である. 次の章からは, 一般のリー群とリー代数に関する話に移行するが, その場合にも上記の「基本定理」と全く同様の性質が成り立つ. また, 一般の場合の方が当然ながら議論は複雑になるが, 基本的な筋道は本章までのものと同じである.

この章では, 第 1 章「線型リー群」, 第 2 章「線型リー代数」, 第 3 章「線型リー群の指数写像」の内容を全て仮定して議論を進める. この章までの内容が, 線型リー群と線型リー代数に関する基本的な事柄である.

4.1 線型リー群に付随する線型リー代数

前章の §3.2 において, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 内の線型リー群 G に対して,

$$\mathrm{Lie}(G) := \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid \exp(sX) \in G \ (\forall s \in \mathbb{R})\} \tag{4.1}$$

が線型部分空間であることを示した. ここでは, 次を示す:

定理 4.1.1 G を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 内の線型リー群とすると, $\mathrm{Lie}(G)$ は $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ 内の線型リー代数である (この $\mathrm{Lie}(G)$ を G **に付随する線型リー代数** と呼ぶ).

第 4 章: 最終更新日 2011/03/24

§4.1.1 では, 線型リー群の 1 変数部分群を定義する. §4.1.2 では, 1 変数部分群を用いて, 随伴作用と括弧積の関係を調べる. §4.1.3 では, 線型リー群の随伴作用を定義する. §4.1.4 では, これらを用いて, 定理 4.1.1 を証明する.

4.1.1　1 変数部分群

ここでは, 線型リー群 G 内の 1 変数部分群を定義し, その微分に関する性質を調べる.

命題 4.1.2 G を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 内の線型リー群とする. 任意の $X \in M_n(\mathbb{R})$ に対して, 写像

$$c_X : \mathbb{R} \to G : s \mapsto \exp(sX) \tag{4.2}$$

は C^∞-級写像であり, さらに群準同型である (この c_X を X から決まる 1 **変数部分群**[*1] と呼ぶ).

証明. C^∞-級写像であることを示す. 写像 c_X は, 写像

$$i_X : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R}) : s \mapsto sX \tag{4.3}$$

と指数写像 $\exp : M_n(\mathbb{R}) \to G$ の合成に他ならない. すなわち $c_X = \exp \circ i_X$. 写像 i_X は明らかに C^∞-級であり, また exp も定理 3.1.8 から C^∞-級であるので, これらの合成も C^∞-級である. 群準同型であること, すなわち

$$c_X(s_1 + s_2) = c_X(s_1)c_X(s_2) \quad (\forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}) \tag{4.4}$$

が成り立つことは, 補題 3.1.5 から直ちに従う. □

次に, 1 変数部分群の微分に関する性質を調べる. 指数写像 exp の微分に関する性質から, 次が従う.

補題 4.1.3 線型リー群 G の 1 変数部分群 $c_X(s) = \exp(sX)$ に対して, 次が成り立つ:

$$c'_X(0) := \tfrac{d}{ds}c_X(s)|_{s=0} = X. \tag{4.5}$$

証明. 1 変数部分群は, (4.3) で定義した記号を用いると $c_X = \exp \circ i_X$ と表される. 指数写像の全微分 $d\exp$ は, 補題 3.1.7 より

$$(d\exp)_0(Y) = Y \quad (\forall Y \in M_n(\mathbb{R})) \tag{4.6}$$

をみたすので, 合成写像の微分の公式より題意は従う. 実際,

$$c'_X(0) = d(c_X)_0(1) = d(\exp \circ i_X)_0(1) = d(\exp)_{i_X(0)} \circ d(i_X)_0(1) = X \tag{4.7}$$

となり, 題意は示される. □

[*1] one-parameter subgroup

4.1.2　随伴作用と括弧積

ここでは, 線型リー代数の括弧積が, 1 変数部分群と随伴作用 Ad を用いて表すことができることを示す. 各 $a \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ に対して, 随伴作用 Ad_a は

$$\mathrm{Ad}_a : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \to \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) : X \mapsto aXa^{-1} \tag{4.8}$$

で定義される写像であった (定義 2.5.1).

命題 4.1.4 G を線型リー群とする. 任意の $X, Y \in \mathrm{Lie}(G)$ に対して, 次が成り立つ:

$$\tfrac{d}{ds}\mathrm{Ad}_{c_X(s)}(Y)|_{s=0} = [X, Y]. \tag{4.9}$$

証明. 任意に $X, Y \in \mathrm{Lie}(G)$ をとる. 積の微分の公式と, c_X の微分の性質 (補題 4.1.3) を用いると,

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{ds}\mathrm{Ad}_{c_X(s)}(Y)|_{s=0} &= \tfrac{d}{ds}c_X(s)Y(c_X(s))^{-1}|_{s=0} \\ &= c'_X(0)Y(c_X(0))^{-1} - c_X(0)Yc'_X(0)(c_X(0))^{-2} \\ &= XY - YX \\ &= [X, Y]\end{aligned}$$

となる. 以上で題意は示された. □

証明から分かるように, c_X を, $c(0) = e$ かつ $c'(0) = X$ をみたす任意の C^∞-級曲線に置き換えても, 式 (4.9) は成立する.

4.1.3　線型リー群の随伴作用

ここでは, 線型リー群 G の随伴作用を定義する. まず初めに, 指数写像 exp と内部自己同型 I の関係を調べる. 各 $a \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ に対して, 内部自己同型 I_a は

$$I_a : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : g \mapsto aga^{-1} \tag{4.10}$$

で定義される写像であった (定義 1.5.1).

命題 4.1.5 任意の $a \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ に対して, 次が成り立つ: $\exp \circ \mathrm{Ad}_a = I_a \circ \exp$.

証明. これは補題 3.2.7 の言い換え. □

これを用いて, 線型リー群 G の $\mathrm{Lie}(G)$ への随伴作用を定義する.

命題 4.1.6 G を線型リー群とし, $a \in G$ とする. このとき, 任意の $X \in \mathrm{Lie}(G)$ に対して, $\mathrm{Ad}_a(X) \in \mathrm{Lie}(G)$ が成り立つ. これによって得られる次の写像を G **の随伴作用**[*2] と呼ぶ:

$$\mathrm{Ad}_a : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(G) : X \mapsto aXa^{-1}.$$

証明. 任意に $a \in G$ と $X \in \mathrm{Lie}(G)$ をとる. 示すことは $\mathrm{Ad}_a(X) \in \mathrm{Lie}(G)$ である. 任意に $s \in \mathbb{R}$ をとる. すると, 命題 4.1.5 および G が群であることから,

$$\exp(s\mathrm{Ad}_a(X)) = \exp(\mathrm{Ad}_a(sX)) = I_a(\exp(sX)) = a\exp(sX)a^{-1} \in G$$

が成り立つ. よって $\mathrm{Ad}_a(X) \in \mathrm{Lie}(G)$ が示された. □

4.1.4　付随する線型リー代数

ここでは, 定理 4.1.1 を示す. 証明には, 線型リー群 G の随伴作用を用いる. 定理 3.2.4 より, G が線型リー群ならば, $\mathrm{Lie}(G)$ は線型部分空間になる. そこで, 以下では仮定を少しだけ弱くして, G は線型リー群ではなく, G は部分群であり $\mathrm{Lie}(G)$ が線型部分空間になるようなもの, として証明を行う.

命題 4.1.7 G を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 内の部分群とし, $\mathrm{Lie}(G)$ が $M_n(\mathbb{R})$ 内の線型部分空間であるとする. このとき, $\mathrm{Lie}(G)$ は線型リー代数である.

証明. 仮定より $\mathrm{Lie}(G)$ は $M_n(\mathbb{R})$ 内の線型部分空間なので, $\mathrm{Lie}(G)$ が括弧積に関して閉じていることを示せば良い. 任意に $X, Y \in \mathrm{Lie}(G)$ をとる. X から決まる 1 変数部分群は $c_X(s) = \exp(sX) \in G$ をみたすので, 命題 4.1.6 より,

$$\gamma(s) := \mathrm{Ad}_{c_X(s)}(Y) \in \mathrm{Lie}(G)$$

が成り立つ. この $\gamma(s)$ は s をパラメータとする $\mathrm{Lie}(G)$ 内の C^∞-級曲線になる. ここで $\mathrm{Lie}(G)$ は線型部分空間であったので,

$$\gamma'(0) = \lim_{s=0}(1/s)(\gamma(s) - \gamma(0)) \in \mathrm{Lie}(G)$$

が成り立つ. 命題 4.1.4 より,

$$\mathrm{Lie}(G) \ni \gamma'(0) = \tfrac{d}{dt}\mathrm{Ad}_{c_X(s)}(Y)|_{s=0} = [X, Y]$$

となる. よって $\mathrm{Lie}(G)$ は括弧積に関して閉じている. すなわち $\mathrm{Lie}(G)$ は線型リー代数である. □

線型リー群に付随する線型リー代数の具体例については §3.2.2 を参照.

[*2] adjoint action of G

4.2　線型リー群と線型リー代数の対応の基本定理

この節では, 次の定理を証明する.

定理 4.2.1 G_1, G_2 を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 内の線型リー群とする. このとき, G_1 と G_2 が局所同型であるための必要十分条件は, それぞれに付随する線型リー代数 $\mathrm{Lie}(G_1)$ と $\mathrm{Lie}(G_2)$ が同型となることである.

十分性の証明を §4.2.1 で, 必要性の証明を §4.2.2 で, それぞれ行う. 線型リー群の局所同型は I_a によって定義され, 線型リー代数の同型は Ad_a によって定義されていた. これらが指数写像を通して関係する (命題 4.1.5) ことが, 証明の鍵である.

4.2.1　十分性の証明

ここでは定理 4.2.1 の十分性の証明を行う. まず初めに, 線型リー群 G に対応する線型リー代数 $\mathrm{Lie}(G)$ は, G の単位元の近傍だけで決まることを見ておく.

補題 4.2.2 G を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 内の線型リー群とする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 次が成り立つ:

$$\mathrm{Lie}(G) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid \forall s \in (0, \varepsilon),\ \exp(sX) \in G\}.$$

証明. 定義より $(\subset)$ が成り立つことは明らか. $(\supset)$ を示す. 右辺から任意に X をとる. 任意に $s \in \mathbb{R}$ をとる. 示すことは $\exp(sX) \in G$ である. これは $s = 0$ のときは明らかなので, $s \neq 0$ の場合のみを考える. このとき $m \in \mathbb{Z}$ を上手く選べば $s/m \in (0, \varepsilon)$ となる. 仮定から $\exp((s/m)X) \in G$ である. 補題 3.1.5 および G が群であることから,

$$\exp(sX) = \exp(m(s/m)X) = (\exp((s/m)X))^m \in G.$$

よって $X \in \mathrm{Lie}(G)$ が成り立つ. □

これを用いて, 定理 4.2.1 の十分性を示す.

命題 4.2.3 G_1, G_2 を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 内の線型リー群とする. このとき, G_1 と G_2 が局所同型ならば, 付随する線型リー代数 $\mathrm{Lie}(G_1)$ と $\mathrm{Lie}(G_2)$ は同型である.

証明. 直感的に言うと, G_1 と G_2 が局所同型ならば, それぞれの単位元の近傍は同型になり, $\mathrm{Lie}(G_1)$ と $\mathrm{Lie}(G_2)$ は単位元の近傍だけで決まる (補題 4.2.2) ので, それらは同型になる. この方針に従って, 証明を行う.

仮定より G_1 と G_2 が局所同型なので, 定義より, G_1 の単位元の近傍 U_1, G_2 の単位元の近傍 U_2, および $a \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ を上手く選ぶと, $I_a(U_1) = U_2$ が成り立つ. 示すことは $\mathrm{Lie}(G_1)$ と $\mathrm{Lie}(G_2)$ が同型であることなので, 次を示せば良い:

$$\mathrm{Ad}_a(\mathrm{Lie}(G_1)) = \mathrm{Lie}(G_2). \tag{4.11}$$

まずは次を示す:

$$\mathrm{Ad}_a(\mathrm{Lie}(G_1)) \subset \mathrm{Lie}(G_2). \tag{4.12}$$

任意に $X \in \mathrm{Ad}_a(\mathrm{Lie}(G_1))$ をとる. 定義より $Y \in \mathrm{Lie}(G_1)$ を用いて $X = \mathrm{Ad}_a(Y)$ と書くことができる. 示すことは $X \in \mathrm{Lie}(G_2)$ である. ここで, 写像

$$i_Y : \mathbb{R} \to G_1 : s \mapsto \exp(sY) \tag{4.13}$$

は連続であり, U_1 は G_1 内の開集合なので,

$$\exists \varepsilon > 0 \,:\, \forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon),\ \exp(sY) \in U_1 \tag{4.14}$$

が成り立つ. この $\varepsilon > 0$ に対して, 補題 4.2.2 より,

$$\mathrm{Lie}(G_2) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid \forall s \in (0, \varepsilon),\ \exp(sX) \in G\} \tag{4.15}$$

である. 任意に $s \in (0, \varepsilon)$ をとる. すると命題 4.1.5 と ε の決め方から

$$\exp(sX) = \exp(s\mathrm{Ad}_a(Y)) = \exp(\mathrm{Ad}_a(sY)) = I_a(\exp(sY)) \in I_a(U_1) = U_2 \tag{4.16}$$

が成り立つ. よって $X \in \mathrm{Lie}(G_2)$ が示された. 以上より (4.12) が成り立つ.

仮定から $I_{a^{-1}}(U_2) = U_1$ が成り立つことに注意して, これに (4.12) の結果を適用すると,

$$\mathrm{Ad}_{a^{-1}}(\mathrm{Lie}(G_2)) \subset \mathrm{Lie}(G_1) \tag{4.17}$$

が成り立つ. (4.12) と (4.17) によって, (4.11) が示された. □

4.2.2　必要性の証明

ここでは定理 4.2.1 の必要性の証明を行う. 証明には, 線型リー群の指数写像 exp が局所的な同相写像である (定理 3.3.4) ことを用いる.

命題 4.2.4 G_1, G_2 を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 内の線型リー群とする. このとき, 付随する線型リー代数 $\mathrm{Lie}(G_1)$ と $\mathrm{Lie}(G_2)$ が同型ならば, G_1 と G_2 は局所同型である.

証明. 直感的に言うと, $\mathrm{Lie}(G_1)$ と $\mathrm{Lie}(G_2)$ が同型ならば, 当然ながら局所同型でもあり, G_1 と $\mathrm{Lie}(G_1)$ および G_2 と $\mathrm{Lie}(G_2)$ はそれぞれ局所同型 (定理 3.3.4) なので, これらを繋げれば G_1 と G_2 が局所同型であることが示される. この方針に従って, 証明を行う.

仮定より $\mathrm{Lie}(G_1)$ と $\mathrm{Lie}(G_2)$ が同型なので, $a \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ を上手く選ぶと,

$$\mathrm{Ad}_a(\mathrm{Lie}(G_1)) = \mathrm{Lie}(G_2) \tag{4.18}$$

が成り立つ. 示すことは, I_a によって G_1 と G_2 の間の局所同型が与えられることである. 定理 3.3.4 より, G_1 の単位元の近傍 U_1', $\mathrm{Lie}(G_1)$ の 0 の近傍 V_1', G_2 の単位元の近傍 U_2', $\mathrm{Lie}(G_2)$ の 0 の近傍 V_2' を上手くとると,

$$\exp : V_1' \to U_1', \quad \exp : V_2' \to U_2' \tag{4.19}$$

は共に同相写像になる. ここで,

$$V_1 := V_1' \cap \mathrm{Ad}_{a^{-1}}(V_2'), \quad V_2 := \mathrm{Ad}_a(V_1') \cap V_2' \tag{4.20}$$

とおく. このとき V_1 と V_2 は, それぞれ $\mathrm{Lie}(G_1)$ と $\mathrm{Lie}(G_2)$ の 0 の近傍である. また定義から

$$\mathrm{Ad}_a(V_1) = \mathrm{Ad}_a(V_1' \cap \mathrm{Ad}_{a^{-1}}(V_2')) = \mathrm{Ad}_a(V_1') \cap V_2' = V_2 \tag{4.21}$$

となることに注意する. ここで

$$U_1 := \exp(V_1), \quad U_2 := \exp(V_2) \tag{4.22}$$

とおくと, U_1, U_2 はそれぞれ G_1, G_2 の単位元の近傍である. すると, 命題 4.1.5 および (4.21) から,

$$I_a(U_1) = I_a \circ \exp(V_1) = \exp \circ \mathrm{Ad}_a(V_1) = \exp(V_2) = U_2 \tag{4.23}$$

となる. 以上により, G_1 と G_2 は局所同型である. □