ベジエ曲線「超」入門 *

田丸 博士 (広島大学大学院理学研究科)

概要

本稿では, ベジエ曲線の定義と性質を紹介する. また, Mathematica を使ってベジエ曲線を実際に描く演習を行う.

1 イントロ

ベジエ曲線とは, 有限個の点からなめらかな曲線を作成する所定の手続き (またはその手続きで作成された曲線) のことである. 本稿の目的は, この手続きと, さらにそれが縮小・拡大などの操作で保たれることを紹介することである. ちなみにベジエ (Bezier) は, この手続きを開発した自動車設計技師の名前である.

ベジエ曲線の説明に入る前に, まずは曲線の復習をする.

定義 1.1 I を $\mathbb{R}$ 内の空でない開集合とする. このとき, 写像 $c : I \to \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ 内の **曲線** と呼ぶ. この写像の像 $c(I)$ のことを曲線と呼ぶこともある.

曲線 c は, 座標を用いて $c(t) = (x(t), y(t))$ と表すことができる. これを助変数表示, または媒介変数表示と呼ぶ. 例えば, $c(t) = (\cos t, \sin t)$ は単位円の助変数表示. また, $y = f(x)$ のグラフに対して, $c(t) = (t, f(t))$ は助変数表示. 与えられた曲線に対して, 助変数表示が一意的でないことは, 念のために注意しておく.

例 1.2 $\mathbb{R}^2$ 内の 3 点 b_0, b_1, b_2 に対して, 以下の手続きで曲線を作る:

(1) $b_0^1(t) := (1-t)b_0 + tb_1$ (すなわち, b_0 と b_1 を $t : 1-t$ に内分する点);

(2) $b_1^1(t) := (1-t)b_1 + tb_2$ (すなわち, b_1 と b_2 を $t : 1-t$ に内分する点);

(3) $b_0^2(t) := (1-t)b_0^1 + tb_1^1$ (すなわち, b_0^1 と b_1^1 を $t : 1-t$ に内分する点).

このとき $b_0^2(t)$ は放物線を描く. 例えば, $b_0 = (-1.1)$, $b_1 = (0, -1)$, $b_2 = (1, 1)$ の場合に

---

* 情報システムと幾何 (2016 年度後期, 田丸担当分) 講義資料

は $b_0^2 = (2t-1, (2t-1)^2)$ となり, これは $y = x^2$ の媒介変数表示になる.

2　定義

ここでは平面 $\mathbb{R}^2$ 内のベジエ曲線の定義を述べる. ベジエ曲線は, 例 1.2 の点の数を増やしたものに相当する.

定義 2.1　$b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$ とする. このとき, 次で帰納的に定義される曲線 $b_0^n(t)$ を, $b_0, \ldots, b_n$ を制御点とする **ベジエ曲線** と呼ぶ:

$$\begin{aligned} &b_0^0 := b_0, \ldots, b_n^0 := b_n, \\ &b_i^r(t) := (1-t)\, b_i^{r-1}(t) + t\, b_{i+1}^{r-1}(t) \quad (r \in \{1, \ldots, n\},\ i \in \{0, \ldots, n-r\}). \end{aligned}$$

ベジエ曲線 $b_0^n(t)$ の各成分は, t の多項式になることが容易に分かる (さらに, 高々 n 次式である). ベジエ曲線を簡単のために $\mathrm{Bez}[b_0^0, \ldots, b_n^0](t)$ と表すこともある.

3　性質

ベジエ曲線を取る操作が, アフィン変換で不変であることを紹介する. まずはアフィン変換を定義する. $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ を 2×2 の実一般線型群とする.

定義 3.1　写像 $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を考える. このとき Φ が **アフィン変換** であるとは, 次が成り立つこと: $\exists A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$, $\exists v \in \mathbb{R}^2 : \forall x \in \mathbb{R}^2$, $\Phi(x) = Ax + v$.

アフィン変換は, A が単位行列の場合は平行移動, $v = 0$ の場合は線型写像である. よって特に, アフィン変換は, 縮小・拡大・平行移動・回転を含む.

命題 3.2　ベジエ曲線はアフィン変換で不変である. すなわち, $b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^2$ およびアフィン変換 $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ に対し, 次が成り立つ:

$$\mathrm{Bez}[\Phi(b_0), \ldots, \Phi(b_n)](t) = \Phi\left(\mathrm{Bez}[b_0, \ldots, b_n](t)\right).$$

言葉でもう少し正確に言うと, 制御点をアフィン変換したベジエ曲線は, 元のベジエ曲線をアフィン変換したものと一致する. 従って, ベジエ曲線で描かれた図形をアフィン変換する場合には, 曲線上の全ての点を変換する必要はなく, 制御点だけをアフィン変換してからベジエ曲線を描けば良いことになる. これにより, 縮小・拡大・回転といった操作を (計算機上で) 効率よく行うことができる.

4　演習

この講義では, Mathematica を使った演習を行う. とりあえず使ってみて慣れる (実際に使う必要が生じたときのハードルを下げておく) ことを目標とする. Mathematica を使うと様々なことができるが, 今回は特に曲線 (ベジエ曲線) を描くことに話を絞る.

問題 4.1　Mathematica を用いていろいろな曲線を描け. 特に, 以下の方法で表示された曲線を, それぞれ描いてみよ:

(1)　陽関数表示 (グラフともいう; $y = f(x)$ の形で表されるもの),
(2)　助変数表示 (前述の通り; $c(t) = (x(t), y(t))$ の形で表されるもの),
(3)　陰関数表示 ($F(x, y) = 0$ の形で表されるもの).

問題 4.2　Mathematica を用いて, 以下の 2 通りの方法でベジエ曲線を描け:

(1)　ベジエ曲線を出力するコマンドを用いた方法,
(2)　制御点から助変数表示を計算して, それを出力する方法.

問題 4.3（レポート問題）　上のように 2 通りの方法で描いたベジエ曲線のファイルを提出せよ. ただし, 以下のルールを要請する:

(1)　ファイル名は学生番号と氏名を書いたものとする. そのファイルをメールに添付して提出すること.
(2)　ベジエ曲線で用いる座標に, 自分の学生番号の下 3 桁を入れること.
(3)　ベジエ曲線の制御点は 4 点以上にすること. また, 描いたベジエ曲線がきれいに見えるように, 出力範囲を工夫すること.
(4)　ファイルは, 単に結果が出力で来ていれば良しではなく, 他の人が見ても分かりやすいように整理すること.

参考文献

[1] 坂根由昌: ベジエ曲線とベジエ曲面. 数学 **56** (2004), 201–214.
[2] 坂根由昌: ベジエ曲線とベジエ曲面. In: 現代数理入門 (宮西正宜, 茨木俊秀編), 第 6 章, 関西学院大学出版会, 2009.