平成 27 年度卒業論文
リー群とリー環の対応

広島大学理学部数学科
B125988 赤瀬文章
指導教員 田丸博士 教授

2016 年 2 月 10 日

はじめに

リー群には, それから構成されるリー環がある. 本論文では, リー群から構成されるリー環とその性質についてまとめた.

第 1 章では, リー群とその準同型を定義した.

第 2 章では, リー環とその準同型を定義した.

第 3 章では, リー群からリー環を構成し, その性質についてまとめた.

本論文を書くにあたり, 田丸博士先生をはじめ, 奥田隆幸先生, 久保亮先生, 並びに, ゼミの先輩方には, 多くのご指導をいただきました. この場をお借りして, 深く御礼申し上げます.

目次

1 リー群 1
1.1 リー群の定義 1
1.2 リー群準同型 2

2 リー環 4
2.1 リー環の定義 4
2.2 リー環準同型 5

3 左不変ベクトル場 7
3.1 左不変ベクトル場の定義 7
3.2 リー群のリー環の性質 8

1　リー群

1.1　リー群の定義

定義 1.1. 集合 G が m 次元 <u>リー群</u> であるとは, 以下が成り立つこと:

(i) G は m 次元 C^∞ 級多様体.

(ii) G は群.

(iii) 以下の群としての積をとる演算, 逆元をとる演算を定義する写像がともに C^∞ 級写像.

$$\Phi : G \times G \to G : (g, h) \mapsto gh \tag{1.1}$$
$$\Psi : G \to G : g \mapsto g^{-1} \tag{1.2}$$

位相空間としての G が連結であるとき連結リー群, コンパクトであるときコンパクトリー群と呼ぶ.

例 1.2. 以下は m 次元連結リー群である:

(1) $\mathbb{R}^m$.

(2) m 次元実ベクトル空間 V.

証明. (1), (2) ともに m 次元連結 C^∞ 級多様体であり, 可換群である. また, これらが条件 (iii) を満たすことは明らかである. □

V を m 次元実ベクトル空間とする. このとき以下を定義する:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V) := \{ f : V \to V \mid \text{実線型写像} \}.$$
$$\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(V) := \{ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V) \mid \text{実線型同型写像} \}.$$

例 1.3. V を m 次元実ベクトル空間とする. 以下は m^2 次元リー群である:

(1) $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$.

(2) $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(V)$.

証明. (1) を示す. まず, $(a_{ij}) \in M(m, \mathbb{R}) \mapsto (a_{11}, \ldots, a_{1m}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mm}) \in \mathbb{R}^{m^2}$ によって, $M(m, \mathbb{R})$ と $\mathbb{R}^{m^2}$ が同相となるように $M(m, \mathbb{R})$ 上に位相を定める. これによって $M(m, \mathbb{R})$ が m^2 次元 C^∞ 級多様体であることは容易にわかる. また, $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ は $M(m, \mathbb{R})$ の開集合であるから, $M(m, \mathbb{R})$ の開部分多様体となる. さらに, 行列の積をとる演算によって $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ は群となる. また, (1.1) は, 成分の多項式で書くことができるので C^∞ 級. (1.2) も, 成分の有理式で書くことができるので C^∞ 級.
(2) を示す. V の任意の基底を $\{v_1, \ldots, v_m\}$ とする. 以下の写像を考える:

$$I^* : \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V) \to M(m, \mathbb{R}) : f \mapsto A(f) \tag{1.3}$$

ただしここで, $A(f)$ は f の基底 $\{v_1, \dots, v_m\}$ に関する表現行列とする．これが同相写像になるように $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$ に位相を定める．I^* と (1) を使えば, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$ が m^2 次元 C^∞ 級多様体であることは容易にわかる．また, $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(V)$ は $\mathrm{Hom}(V, V)$ の開集合であるから, $\mathrm{Hom}(V, V)$ の開部分多様体となる．さらに, 写像の合成をとる演算によって $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(V)$ は群となる．これが条件 (iii) を満たすことは (1) を使って容易にわかる． □

例 1.4. G_i を m_i 次元リー群とする $(i = 1, 2)$．このとき $G_1 \times G_2$ は $m_1 + m_2$ 次元リー群.

証明. まず, $G_1 \times G_2$ は $m_1 + m_2$ 次元 C^∞ 級多様体である．これが, 群構造を持ち条件 (iii) を満たすことは容易にわかる． □

例 1.5. $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ は 1 次元連結コンパクトリー群である．

証明. S^1 は 1 次元連結コンパクト多様体であり, 可換群である．これが条件 (iii) を満たすことは容易にわかる． □

例 1.6. $H_3 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ をハイゼンベルグ群といい, これは, 3 次元リー群である．

証明. まず, $\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H_3 \mapsto (x, y, z) \in \mathbb{R}$ によって, H_3 と $\mathbb{R}^3$ が同相となるように H_3 上に位相を定める．これによって, H_3 が 3 次元 C^∞ 級多様体であることは容易にわかる．また行列の積によって群となることは, 簡単な計算でわかる．さらに, (1.1), (1.2) ともに成分の多項式で書けるので, C^∞ 級． □

1.2 リー群準同型

定義 1.7. G_i を m_i 次元リー群とする $(i = 1, 2)$．写像 $f : G_1 \to G_2$ が リー群準同型写像 であるとは以下が成り立つこと:

(i) f は群準同型写像.

(ii) f は C^∞ 級写像.

とくに (ii)' f が C^∞ 級微分同相写像であるとき リー群同型写像 という．このとき G_1 と G_2 は リー群として同型 であるという．

例 1.8. 次で定義される写像はリー群準同型写像である:

$$f : \mathbb{R} \to S^1 : t \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{-1}t}.$$

証明. 容易なので略． □

例 1.9. V を m 次元実ベクトル空間とする．以下はそれぞれリー群として同型である:

(1) $\mathbb{R}^m$ と V.

(2) $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(V)$ と $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$.

証明. (1) を示す, まず, V の任意の基底を $\{v_1, \ldots, v_m\}$ とする．以下の写像を考える．

$$I : \mathbb{R} \to V : (a_1, \ldots, a_m) \mapsto \sum_{i=1}^{m} a_i v_i.$$

これは群同型写像であり, C^∞ 級微分同相写像でもある．よって I はリー群同型写像であり, $\mathbb{R}^m$ と V はリー群として同型.
(2) を示す．(1.3) は $A(f \circ g) = A(f)A(g)$ と $I^*(\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(V)) = \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ を満たす．これより

$$I^* : \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(V) \to \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$$

は群準同型写像であり, これが C^∞ 級微分同相写像であることは定義より明らか．よって $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(V)$ と $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ はリー群として同型. □

2　リー環

この章では k は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ を表す.

2.1　リー環の定義

定義 2.1. $\mathfrak{g}$ を k 上のベクトル空間とし, 写像 $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を考える. このとき, $(\mathfrak{g}, [,])$ が k 上の <u>リー環</u> であるとは以下が成り立つこと:

(i) 写像 $[,]$ は双線型. (双線型性)

(ii) $\forall X, Y \in \mathfrak{g}, [X, Y] = -[Y, X]$. (交代性)

(iii) $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}, [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$. (ヤコビ律)

$[,]$ のことを <u>括弧積</u> または <u>ブラケット積</u> と呼ぶ.

M を m 次元 C^∞ 級多様体とし, その上の C^∞ 級ベクトル場の全体を $\mathfrak{X}(M)$ で表す.

例 2.2. 以下は $[,]$ をそれぞれ次で定義することによってリー環である:

(1) 任意の $X, Y \in \mathfrak{X}(M), f \in C^\infty(M)$ に対して, $[X, Y](f) := X(Yf) - Y(Xf)$ とする. このとき, $\mathfrak{X}(M)$ は $\mathbb{R}$ 上のリー環である.

(2) 任意の $A, B \in M(m, k)$ に対して, $[A, B] := AB - BA$ とする. このとき, $M(m, k)$ は k 上のリー環である. また, これを $\mathfrak{gl}(m, k)$ で表す.

(3) 任意の $f, g \in \mathrm{Hom}_k(V, V)$ に対して, $[f, g] := f \circ g - g \circ f$ とする. このとき, $\mathrm{Hom}_k(V, V)$ は k 上のリー環である. また, これを $\mathfrak{gl}_k(V)$ で表す.

(4) 任意の $u, v \in \mathbb{R}^m$ に対して, $[u, v] := 0$ とする. このとき, $\mathbb{R}^m$ は $\mathbb{R}$ 上のリー環である. また, これを $\mathfrak{a}(m)$ で表し, 可換リー環と呼ぶ.

証明. (1) を示す. 任意の $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して, $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ であることに注意して, 条件 (i), (ii) はベクトル場の和とスカラー倍の定義より簡単な計算で示せる. 条件 (iii) も定義に従って展開すれば示せる. (2), (3) も簡単な計算で確かめられ, (4) は明らかにリー環である. □

定義 2.3. V を k 上のリー環とする. W が V の <u>部分リー環</u> であるとは, 以下が成り立つこと:

(i) $W \subset V$: k–線型部分空間

(ii) $\forall X, Y \in W, [X, Y] \in W$

例 2.4. $\mathfrak{h}_3 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ は, $M(3, \mathbb{R})$ の部分リー環である. また, これをハイゼンベルグリー環という.

証明. 定義に従って容易に示せる. □

2.2 リー環準同型

定義 2.5. V, W を k 上のリー環とする．$\varphi : V \to W$ が リー環準同型写像 であるとは, 以下が成り立つこと:

(i) φ は k-線型写像.

(ii) $\forall X, Y \in V, \varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)]$.

とくに (i)' φ が k–線型同型写像であるとき リー環同型写像, さらに $V = W$ のとき リー環自己同型写像 という.

命題 2.6. U, V, W を k 上のリー環とする．このとき, 以下が成り立つ:

(1) 恒等写像 $\mathrm{id} : V \to V$ はリー環同型写像である.

(2) $\varphi : V \to W$ をリー環同型写像とする．このとき, 逆写像 φ^{-1} もリー環同型写像である.

(3) $\varphi : V \to W, \psi : U \to V$ をリー環準同型写像とする．このとき, $\varphi \circ \psi$ もリー環準同型写像である.

証明. (1) は明らか．(2) を示す．まず, φ を線型同型より φ^{-1} も線型同型である．次に, 任意に $z, w \in W$ をとる．このとき, ある $x, y \in V$ が唯一つ存在して, $z = \varphi(x), w = \varphi(y)$ である．φ がリー環準同型写像であることを用いて以下のように式変形できる:

$$
\begin{aligned}
\varphi^{-1}([z, w]) &= \varphi^{-1}([\varphi(x), \varphi(y)]) \\
&= \varphi^{-1}(\varphi[x, y]) \\
&= [x, y] \\
&= [\varphi^{-1}(z), \varphi^{-1}(w)].
\end{aligned}
$$

よって, 逆写像 φ^{-1} もリー環同型写像である.

(3) を示す．まず, φ, ψ 線型より合成写像 $\varphi \circ \psi$ も線型．次に, 任意に $x, y \in U$ をとる．すると, 以下のように式変形できる:

$$
\begin{aligned}
\varphi \circ \psi([x, y]) &= \varphi(\psi([x, y])) \\
&= \varphi([\psi(x), \psi(y)]) \\
&= [\varphi(\psi(x)), \varphi(\psi(y))] \\
&= [\varphi \circ \psi(x), \varphi \circ \psi(y)].
\end{aligned}
$$

よって, $\varphi \circ \psi$ もリー環準同型写像である. □

例 2.7. (1.3) の定義域と値域に括弧積を定めた次の写像はリー環同型写像である:

$$I^* : \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V) \to \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$$

証明. まず, I^* は線型同型である．次に任意の $f, g \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V)$ をとる．$A(f \circ g) = A(f)A(g)$ が成り

立つことを用いて以下のように式変形できる:

$$\begin{aligned}A([f,g]) &= A(f\circ g - g\circ f)\\ &= A(f\circ g) - A(g\circ f)\\ &= A(f)A(g) - A(g)A(f)\\ &= [A(f), A(g)].\end{aligned}$$

よって, I^* はリー環同型写像. □

例 2.8. $\mathfrak{g}$ を k 上のリー環とする. 各 $X\in\mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{ad}_X : \mathfrak{g}\to\mathfrak{g} : Y\mapsto [X,Y]$ と定義する. このとき, 次はリー環準同型写像である:

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}_k(\mathfrak{g}) : X\mapsto \mathrm{ad}_X$$

証明. まず, 括弧積が双線型であることを用いれば ad が線型であることは容易にわかる. 次に条件 (ii) を示す. そのために, 任意に $X,Y,Z\in\mathfrak{g}$ をとる. 括弧積の交代性とヤコビ律を用いて以下のように式変形できる:

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_{[X,Y]}(Z) &= [[X,Y],Z]\\ &= [X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z]]\\ &= \mathrm{ad}_X(\mathrm{ad}_Y(Z)) - \mathrm{ad}_Y(ad_X(Z))\\ &= [\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y](Z).\end{aligned}$$

よって, ad はリー環準同型写像. □

3　左不変ベクトル場

3.1　左不変ベクトル場の定義

定義 3.1. G をリー群とし, $X \in \mathfrak{X}(G)$ とする. この X が 左不変 であるとは, 次が成り立つこと:

$$\forall g \in G, \forall \xi \in C^\infty(G), X(\xi \circ L_g) = (X\xi) \circ L_g.$$

ただしここで, $L_g : G \to G : h \mapsto gh$ とする (これを左変換という).

命題 3.2. $X \in \mathfrak{X}(G)$ に対して, 以下は互いに同値である:

(1) X は左不変.

(2) $\forall g, h \in G, (dL_g)_h X_h = X_{gh}$.

(3) $\forall g \in G, (dL_g)_e X_e = X_g$ (ただし e は単位元).

証明. ((1) $\Rightarrow$ (2))　(1) を仮定する. 任意に $g, h \in G$ をとる. $(dL_g)_h X_h = X_{gh}$ を示したい. そのために, 任意に $\xi \in C^\infty(G)$ をとる. すると, 以下のように式変形できる:

$$\begin{aligned} (dL_g)_h X_h(\xi) &= X_h(\xi \circ L_g) \\ &= X(\xi \circ L_g)(h) \\ &= ((X\xi) \circ L_g)(h) \\ &= X\xi(gh) \\ &= X_{gh}\xi. \end{aligned}$$

よって, $(dL_g)_h X_h = X_{gh}$.
((2) $\Rightarrow$ (3))　明らか.
((3) $\Rightarrow$ (1))　(3) を仮定する. 任意に $g \in G, \xi \in C^\infty(G)$ をとる. $X(\xi \circ L_g) = (X\xi) \circ L_g$ を示したい. そのために, 任意に $h \in G$ をとる. すると, 以下のように式変形できる:

$$\begin{aligned} X(\xi \circ L_g)(h) &= X_h(\xi \circ L_g) \\ &= (dL_h)_e X_e(\xi \circ L_g) \\ &= X_e(\xi \circ L_g \circ L_h) \\ &= X_e(\xi \circ L_{gh}) \\ &= (dL_{gh})_e X_e(\xi) \\ &= X_{gh}\xi \\ &= X\xi(gh) \\ &= (X\xi) \circ L_g(h). \end{aligned}$$

よって, $X(\xi \circ L_g) = (X\xi) \circ L_g$. 以上より (1), (2), (3) は互いに同値である. □

定理 3.3. $\mathfrak{g}_l(G) := \{X \in \mathfrak{X}(G) \mid 左不変\}$ とする. このとき $\mathfrak{g}_l(G)$ は $\mathfrak{X}(G)$ の部分リー環である.

証明. 任意に $a,b \in \mathbb{R}, X,Y \in \mathfrak{g}_l(G)$ をとる. $aX+bY, [X,Y] \in \mathfrak{g}_l(G)$ を示したい. そのために, 任意に $g \in G, \xi \in C^\infty(G)$ をとる. すると, それぞれ以下のように式変形できる:

$$\begin{aligned}(aX+bY)(\xi \circ L_g) &= aX(\xi \circ L_g) + bY(\xi \circ L_g) \\ &= a(X\xi) \circ L_g + b(Y\xi) \circ L_g \\ &= (a(X\xi) + b(Y\xi)) \circ L_g \\ &= ((aX+bY)\xi) \circ L_g.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[X,Y](\xi \circ L_g) &= X(Y(\xi \circ L_g)) - Y(X(\xi \circ L_g)) \\ &= X((Y\xi) \circ L_g) - Y((X\xi) \circ L_g) \\ &= X(Y\xi) \circ L_g - Y(X\xi) \circ L_g \\ &= (X(Y\xi) - Y(X\xi)) \circ L_g \\ &= ([X,Y](\xi)) \circ L_g.\end{aligned}$$

よって, $aX+bY, [X,Y] \in \mathfrak{g}_l(G)$. 従って, $\mathfrak{g}_l(G)$ は $\mathfrak{X}(G)$ の部分リー環である. □

$\mathfrak{g}_l(G)$ を リー群 G のリー環 と呼ぶ.

3.2 リー群のリー環の性質

補題 3.4. G を m 次元リー群とする. このとき, 以下は線型同型写像である.

$$\varepsilon : \mathfrak{g}_l(G) \to T_eG : X \mapsto X_e$$

証明. (線型性) ベクトル場の和とスカラー倍の定義より明らか.
(単射性) 任意に $X,Y \in \mathfrak{g}_l(G)$ をとり, $X_e = Y_e$ と仮定する. $X = Y$ を示したい. そのために, 任意に $g \in G$ をとる. すると, $X_g = (dL_g)_e X_e = (dL_g)_e Y_e = Y_g$. よって $X = Y$, 従って, ε は単射.
(全射性) 任意に $u \in T_eG$ をとる. X を各 $g \in G$ に対して, $X_g := (dL_g)_e u (\in T_{L_g(e)}G = T_gG)$ と定義する. このとき, L_e は恒等写像となるので, $X_e = u$ である. まず, X が C^∞ 級であることを示す. そのために, 任意に $f \in C^\infty(G)$ をとり, $Xf \in \mathfrak{X}(G)$ を示す. C^∞ 級アトラスから任意の元 $(V, \psi = (y_1, \ldots, y_m))$ をとる. このとき V 上で $X = \sum_{i=1}^m \xi_i \frac{\partial}{\partial y_j} \quad (\xi_1, \ldots, \xi_m \in C^0(G))$ と表せる. 次に, 任意に $g_0 \in V$ をとる. (1.1) の群の積をとる演算 Φ は C^∞ 級で $g_0 = g_0 e$ と書けるので, ある $g_0 \in V_0$ となる C^∞ 級アトラスの元 (V_0, ψ_0), $e \in U$ となる C^∞ 級アトラスの元 $(U, \varphi = (x_i, \ldots, x_m))$ が存在して, $\Phi : V_0 \times U \to V$ が成り立つ. このとき, $u = \sum_{i=1}^m a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_e \quad (a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R})$ と表せる. $Xf \in \mathfrak{X}(G)$ を示すために, $g \in V_0$ をとる. すると, $Xf(g) = \sum_{i=1}^m \xi_i(g) \frac{\partial(f \circ \psi^{-1})}{\partial y_i}(\psi(g))$ を得る. このとき, $\begin{pmatrix} \xi_1(g) \\ \vdots \\ \xi_m(g) \end{pmatrix} = (J(\psi \circ L_g \circ \varphi^{-1}))_{\varphi(e)} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ を満たす. ここで, $\psi_0 \times \varphi$ を $V_0 \times U$ 上の局所座標系とする. このとき, 任意の $h \in U$ に対して, 次

の式を得る:

$$\begin{aligned}(y_1(gh),\ldots,y_m(gh)) &= \psi(gh)\\ &= \psi(\Phi(g,h))\\ &= \psi\circ\Phi\circ(\psi_0\times\varphi)^{-1}(\psi_0\times\varphi(g,h))\end{aligned}$$

ここで, $y_i(gh)=\eta_i(\psi_0\times\varphi(g,h))$ とおく. すると Φ が C^∞ 級であることから, 各 η_i も C^∞ 級. よって, $\xi_i(g)=\sum_{j=1}^m a_j\frac{\partial(y_i\circ\psi^{-1})}{\partial x_j}(\psi(g))=\sum_{j=1}^m a_j\frac{\partial\eta_i}{\partial x_j}(\psi_0\times\varphi(g,e))$ となり, ξ_i も C^∞ 級である. よって, $Xf\in C^\infty(G)$ となり, X は C^∞ 級. この X がベクトル場であるとこは, 接ベクトルの定義より容易にわかり, 左不変であることは明らか. よって, $X\in\mathfrak{g}_l(G)$ となり, ε は全射. □

これより $\dim\mathfrak{g}_l(G)=\dim T_eG=m$ である.

G_1,G_2 をリー群とし, $f:G_1\to G_2$ をリー群準同型写像とする. 以下の写像を考える.

$$df:\mathfrak{g}_l(G_1)\to\mathfrak{g}_l(G_2):X\mapsto df(X).$$

ただしここで, $df(X):=\varepsilon^{-1}((df)_{e_1}X_{e_1})$. この df を <u>f の微分写像</u> と呼ぶ.

補題 3.5. df に関して, 任意の $X,Y\in\mathfrak{g}_l(G_1),\xi\in C^\infty(G_2)$ に対して, 以下が成り立つ:

(1) $\forall g\in G_1, L_{f(g)}\circ f=f\circ L_g$.

(2) $\forall g\in G_1, df(X)_{f(g)}=(df)_gX_g$.

(3) $\forall g_2\in G_2, df(X)_{g_2}\xi=X_{e_1}(\xi\circ L_{g_2}\circ f)$.

(4) $(df(X)\xi)\circ f=X(\xi\circ f)$.

証明. (1) を示す. 任意に $g,h\in G_1$ をとる. すると, 次のように式変形できる:

$$\begin{aligned}L_{f(g)}\circ f(h) &= f(g)f(h)\\ &= f(gh)\\ &= f\circ L_g(h).\end{aligned}$$

よって, $L_{f(g)}\circ f=f\circ L_g$.

(2) を示す. 任意に $g\in G_1$ をとる. すると, (1) を用いて以下のように式変形できる:

$$\begin{aligned}df(X)_{f(g)}\xi &= (dL_{f(g)})_{e_2}df(X)_{e_2}\xi\\ &= (dL_{f(g)})_{e_2}(df)_{e_1}X_{e_1}\xi\\ &= X_{e_1}(\xi\circ L_{f(g)}\circ f)\\ &= X_{e_1}(\xi\circ f\circ L_g)\\ &= X(\xi\circ f)\circ L_g(e_1)\\ &= X_g(\xi\circ f)\\ &= (df)_gX_g\xi.\end{aligned}$$

よって, $df(X)_{f(g)}=(df)_gX_g$.

(3) を示す. 任意に $g_2 \in G_2$ をとる. すると, (2) を用いて以下のように式変形できる:

$$\begin{aligned} df(X)_{g_2}\xi &= (dL_{g_2})_{e_2} df(X)_{e_2}\xi \\ &= df(X)_{e_2}(\xi \circ L_{g_2}) \\ &= (df)_{e_1} X_{e_1}(\xi \circ L_{g_2}) \\ &= X_{e_1}(\xi \circ L_{g_2} \circ f). \end{aligned}$$

(4) を示す. 任意に $g \in G_1$ をとる. すると, (2) を用いて以下のように式変形できる:

$$\begin{aligned} (df(X)\xi) \circ f(g) &= df(X)_{f(g)}\xi \\ &= (df)_g X_g \xi \\ &= X(\xi \circ f)(g). \end{aligned}$$

よって, $(df(X)\xi) \circ f = X(\xi \circ f)$. □

命題 3.6. 上で定義した df はリー環準同型写像である.

証明. まず, $df = \varepsilon^{-1} \circ (df)_{e_1} \circ \varepsilon$ より df は線型. 次に, 任意に $X, Y \in \mathfrak{g}_l(G_1), \xi \in C^\infty(G_2), g_1 \in G_2$ をとる. すると, 補題 3.5(3), (4) を用いて以下のように式変形できる:

$$\begin{aligned} [df(X), df(Y)](\xi)(g_2) &= df(X)(df(Y)\xi)(L_{g_2}(e_2)) - df(Y)(df(X)\xi)(L_{g_2}(e_2)) \\ &= df(X)(df(Y)(\xi \circ L_{g_2}))(f(e_1)) - df(Y)(df(X)(\xi \circ L_{g_2}))(f(e_1)) \\ &= X(Y(\xi \circ L_{g_2} \circ f))(e_1) - X(Y(\xi \circ L_{g_2} \circ f))(e_1) \\ &= [X, Y](\xi \circ L_{g_2} \circ f)(e_1) \\ &= df([X, Y])\xi(g_2). \end{aligned}$$

よって, $[df(X), df(Y)] = df([X, Y])$. 従って, df はリー環準同型である. □

系 3.7. G_i を m_i 次元リー群とする $(i = 1, 2, 3)$. このとき以下が成り立つ:

(1) $f_1 : G_1 \to G_2, f_2 : G_2 \to G_3$ をリー群準同型写像とする. このとき $d(f_2 \circ f_1) = df_2 \circ df_1$.
(2) $d(\mathrm{id}_{G_1}) = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}_l(G_1)}$.
(3) $f : G_1 \to G_2$ をリー群同型写像とする. このこき $df : \mathfrak{g}_l(G_1) \to \mathfrak{g}_l(G_2)$ はリー環同型写像.

証明. (1) を示す. 任意に $X \in \mathfrak{g}_l(G_1), \xi \in C^\infty(G_3), g \in G_3$ をとる. すると, 補題 3.5(3) を用いて以下のように式変形できる:

$$\begin{aligned} d(f_2 \circ f_1)(X)\xi(g) &= X_{e_1}(\xi \circ L_g \circ f_2 \circ f_1) \\ &= (df_1)_{e_1} X_{e_1}(\xi \circ L_g \circ f_2) \\ &= df_1(X)_{e_2}(\xi \circ L_g \circ f_2) \\ &= df_2(df_1(X))_g \xi \\ &= (df_2 \circ df_1(X))\xi(g). \end{aligned}$$

よって, $d(f_2 \circ f_1) = df_2 \circ df_1$.
(2) を示す. 任意に $X \in \mathfrak{g}_l(G_1), \xi \in C^\infty(G_1), g \in G_1$ をとる. すると, 補題 3.5(3) を用いて以下の

ように式変形できる:

$$
\begin{aligned}
d(\mathrm{id}_{G_1})(X)\xi(g) &= X_{e_1}(\xi \circ L_g \circ \mathrm{id}_{G_1}) \\
&= X_{e_1}(\xi \circ L_g) \\
&= X\xi(g).
\end{aligned}
$$

よって, $d(\mathrm{id}_{G_1})(X) = X$. 従って, $d(\mathrm{id}_{G_1}) = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}_l(G_1)}$.
(3) を示す. 命題 3.6 より df はリー環準同型. よって, df が全単射を示せばよい. まず, f はリー群同型より, f^{-1} もリー群同型. また, (1), (2) を用いて以下のように式変形できる:

$$
\begin{aligned}
df^{-1} \circ df &= d(f^{-1} \circ f) \\
&= d(\mathrm{id}_{G_1}) \\
&= \mathrm{id}_{\mathfrak{g}_l(G_1)}.
\end{aligned}
$$

$df \circ df^{-1} = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}_l(G_2)}$ も同様. よって, df は全単射. 従って df はリー環同型である. □

補題 3.8. $\mathfrak{X}(M) = \mathrm{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right\}$ と表す. このとき以下が成り立つ:

$$
\forall \xi, \eta \in C^\infty(M), \forall i, j \in \{1, \dots, m\}, \left[\xi \frac{\partial}{\partial x_i}, \eta \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = \xi \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} - \eta \frac{\partial \xi}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}
$$

証明. 任意に $\xi, \eta \in C^\infty(M), i, j \in \{1, \dots, m\}$ をとる. すると以下のように式変形できる:

$$
\begin{aligned}
\left[\xi \frac{\partial}{\partial x_i}, \eta \frac{\partial}{\partial x_j}\right] &= \left(\xi \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \xi \eta \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}\right) - \left(\eta \frac{\partial \xi}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta \xi \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\right) \\
&= \xi \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} - \eta \frac{\partial \xi}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}.
\end{aligned}
$$

□

これより, 1 階の偏微分のみ残る. また, ξ, η が定数関数のとき, 0 になる.

補題 3.9. V を m 次元実ベクトル空間とする. 以下はそれぞれリー環として互いに同型である:

(1) $\mathfrak{g}_l(\mathbb{R}^m), \mathfrak{g}_l(V), \mathfrak{a}(m)$.
(2) $\mathfrak{g}_l(\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})), \mathfrak{g}_l(\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(V)), \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$.
(3) $\mathfrak{g}_l(H_3), \mathfrak{h}_3$.

証明. (1) を示す. まず, $\mathbb{R}^m$ と V は, リー群同型なので, 系 3.7(3) より $\mathfrak{g}_l(\mathbb{R}^m)$ と $\mathfrak{g}_l(V)$ はリー環同型である. 次に, $\mathfrak{g}_l(\mathbb{R}^m)$ と $\mathfrak{a}(m)$ がリー環同型を示す. $\mathfrak{g}_l(\mathbb{R}^m) \cong T_o\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m$ は線型同型であることに注意する. $(\mathbb{R}^m, \mathrm{id})$ を $\mathbb{R}^m$ の座標近傍とする. ここで,

$$
\mathfrak{g}_l(\mathbb{R}^m) = \mathrm{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right\}
$$

を示す. 両辺とも次元が m なので, $(\supset)$ だけ示せばよい. すなわち, 各基底に対して, $\frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathfrak{g}_l(\mathbb{R}^m)$ を示せばよい. 各基底が C^∞ 級ベクトル場であることは直接計算で容易にわかる. これが, 左不変

であることを示すために, 任意に $v \in \mathbb{R}^m, \xi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ をとる. また, e_i を単位ベクトルとする. このとき, $(JL_v)_o = I_m$ となることに注意して, 以下のように式変形できる:

$$\begin{aligned}
(dL_v)_o \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_o \xi &= \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_o (\xi \circ L_v) \\
&= \frac{\partial (\xi \circ L_v)}{\partial x_i}(o) \\
&= (J\xi)_v (JL_v)_o e_i \\
&= \frac{\partial \xi}{\partial x_i}(v) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_v \xi.
\end{aligned}$$

よって, $\frac{\partial}{\partial x_i}$ は左不変. 従って, $\mathfrak{g}_l(\mathbb{R}^m) = \mathrm{span}\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m} \right\}$. これより, $f : \mathfrak{a}(m) \to \mathfrak{g}_l(\mathbb{R}^m) : u = (u_1, \ldots, u_m) \mapsto \sum_{i=1}^m u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ は線型同型になる. この f がリー環準同型の条件 (ii) を満たすことは, $\mathfrak{a}(m)$ の性質と補題 3.8 より容易にわかる. よって, f はリー環同型写像. 従って, $\mathfrak{g}_l(\mathbb{R}^m)$ と $\mathfrak{a}(m)$ はリー環同型.

(2) を示す. まず, $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ と $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(V)$ は, リー群同型なので, 系 3.7(3) より $\mathfrak{g}_l(\mathrm{GL}(m, \mathbb{R}))$ と $\mathfrak{g}_l(\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(V))$ はリー環同型である. 次に, $\mathfrak{g}_l(\mathrm{GL}(m, \mathbb{R}))$ と $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$ がリー環同型であることを示す. $\mathfrak{g}_l(\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})) \cong T_{I_m}\mathrm{GL}(m, \mathbb{R}) \cong M(m, \mathbb{R})$ は線型同型であることに注意する. $(\mathrm{GL}(m, \mathbb{R}), \varphi)$ を $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ の座標近傍とする. ただしここで,
$\varphi : \mathrm{GL}(m, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{m^2} : (x_{ij}) \mapsto (x_{11}, \ldots, x_{1m}, \ldots, x_{m1}, \ldots, x_{mm})$ とする. ここで,

$$\mathfrak{g}_l(\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})) = \mathrm{span}\left\{ \sum_{k=1}^m x_{k1} \frac{\partial}{\partial x_{k1}}, \ldots, \sum_{k=1}^m x_{k1} \frac{\partial}{\partial x_{km}}, \ldots, \sum_{k=1}^m x_{km} \frac{\partial}{\partial x_{k1}}, \ldots, \sum_{k=1}^m x_{km} \frac{\partial}{\partial x_{km}} \right\}$$

を示す. 両辺とも次元が m^2 なので, (1) と同様に, 各基底に対して, $\sum_{k=1}^m x_{ki} \frac{\partial}{\partial x_{kj}} \in \mathfrak{g}_l(\mathrm{GL}(m, \mathbb{R}))$ を示せばよい. 各基底が C^∞ 級ベクトル場であることは直接計算で容易にわかる. これが, 左不変であることを示すために, 任意に $B = (b_{ij}) \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R}), \xi \in C^\infty(\mathrm{GL}(m, \mathbb{R}))$ をとる. このとき, $(J(\varphi \circ L_B \circ \varphi^{-1}))_{\varphi(I_m)} = \begin{pmatrix} b_{11}I_m & \cdots & b_{1m}I_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1}I_m & \cdots & b_{mm}I_m \end{pmatrix}$ となることに注意して, 以下のように式変形できる:

$$\begin{aligned}
(dL_B)_{I_m} \sum_{k=1}^m x_{ki}(I_m) \left(\frac{\partial}{\partial x_{kj}} \right)_{I_m} \xi &= \left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right)_{I_m} (\xi \circ L_B) \\
&= \frac{\partial (\xi \circ L_B \circ \varphi^{-1})}{\partial x_{ij}} \varphi(I_m) \\
&= (J(\xi \circ \varphi^{-1}))_{\varphi(B)} (J(\varphi \circ L_B \circ \varphi^{-1}))_{\varphi(I_m)} e_{(i-1)m+j}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= {}^t\!\begin{pmatrix} \frac{\partial(\xi\circ\varphi^{-1})}{\partial x_{11}}(\varphi(B)) \\ \vdots \\ \frac{\partial(\xi\circ\varphi^{-1})}{\partial x_{1m}}(\varphi(B)) \\ \vdots \\ \frac{\partial(\xi\circ\varphi^{-1})}{\partial x_{m1}}(\varphi(B)) \\ \vdots \\ \frac{\partial(\xi\circ\varphi^{-1})}{\partial x_{mm}}(\varphi(B)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11}I_m & \cdots & b_{1m}I_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1}I_m & \cdots & b_{mm}I_m \end{pmatrix} e_{(i-1)m+j} \\
&= {}^t\!\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^m b_{k1}\frac{\partial(\xi\circ\varphi^{-1})}{\partial x_{k1}}(\varphi(B)) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^m b_{k1}\frac{\partial(\xi\circ\varphi^{-1})}{\partial x_{km}}(\varphi(B)) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^m b_{km}\frac{\partial(\xi\circ\varphi^{-1})}{\partial x_{k1}}(\varphi(B)) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^m b_{km}\frac{\partial(\xi\circ\varphi^{-1})}{\partial x_{km}}(\varphi(B)) \end{pmatrix} e_{(i-1)m+j} \\
&= \sum_{k=1}^m b_{ki}\frac{\partial(\xi\circ\varphi^{-1})}{\partial x_{kj}}(\varphi(B)) \\
&= \sum_{k=1}^m x_{ki}(B)\left(\frac{\partial}{\partial x_{kj}}\right)_B \xi.
\end{aligned}
$$

よって, $\sum_{k=1}^m x_{ki}\frac{\partial}{\partial x_{kj}}$ は左不変. 従って,

$$
\mathfrak{g}_l(\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})) = \mathrm{span}\left\{\sum_{k=1}^m x_{k1}\frac{\partial}{\partial x_{k1}}, \dots, \sum_{k=1}^m x_{k1}\frac{\partial}{\partial x_{km}}, \dots, \sum_{k=1}^m x_{km}\frac{\partial}{\partial x_{k1}}, \dots, \sum_{k=1}^m x_{km}\frac{\partial}{\partial x_{km}}\right\}.
$$

これより, $f : \mathfrak{gl}(m,\mathbb{R}) \to \mathfrak{g}_l(\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})) : A = (a_{ij}) \mapsto \sum a_{ij}x_{ki}\frac{\partial}{\partial x_{kj}}$ は線型同型になる. また, 任意の $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathfrak{gl}(m,\mathbb{R})$ に対して, AB の i 行 j 列は, $\sum_{l=1}^m a_{il}b_{lj}$ と表される. このことに注意して以下のように式変形できる:

$$
\begin{aligned}
&\left[\sum a_{ij}x_{ki}\frac{\partial}{\partial x_{kj}}, \sum b_{pq}x_{rp}\frac{\partial}{\partial x_{rq}}\right] \\
&= \sum a_{ij}b_{pq}x_{ki}\frac{\partial x_{rp}}{\partial x_{kj}}\frac{\partial}{\partial x_{rq}} - \sum b_{pq}a_{ij}x_{rp}\frac{\partial x_{ki}}{\partial x_{rq}}\frac{\partial}{\partial x_{kj}} \\
&= \sum a_{ij}b_{jq}x_{ki}\frac{\partial}{\partial x_{kq}} - \sum b_{pi}a_{ij}x_{kp}\frac{\partial}{\partial x_{kj}} \\
&= \sum a_{il}b_{lj}x_{ki}\frac{\partial}{\partial x_{kj}} - \sum b_{il}a_{lj}x_{ki}\frac{\partial}{\partial x_{kj}} \\
&= \sum (a_{il}b_{lj} - b_{il}a_{lj})x_{ki}\frac{\partial}{\partial x_{kj}} \\
&= f([A,B]).
\end{aligned}
$$

よって, f はリー環同型写像. 従って, $\mathfrak{g}_l(\mathrm{GL}(m,\mathbb{R}))$ と $\mathfrak{gl}(m,\mathbb{R})$ はリー環同型である.

(3) を示す. $\mathfrak{g}_l(H_3) \cong T_{I_3}H_3 \cong \mathbb{R}^3 \cong \mathfrak{h}_3$ は線型同型であることに注意する $(H_3, \varphi = (x,y,z)) : H_3$ の座標近傍とする. ただしここで, $\varphi : H_3 \to \mathbb{R} : \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (x,y,z)$ とする. ここで,

$$\mathfrak{g}_l(H_3) = \mathrm{span}\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$$

を示す. 両辺とも次元が 3 なので, (1) と同様に, $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \in \mathfrak{g}_l(H_3)$ を示せばよい. 各基底が C^∞ 級ベクトル場であることは直接計算で容易にわかる. これが, 左不変であることを示すために, 任意に $B = \begin{pmatrix} 1 & p & r \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H_3, \xi \in C^\infty(H_3)$ をとる. このとき, $(J(\varphi \circ L_B \circ \varphi^{-1}))_{I_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & p & 1 \end{pmatrix}$ となることに注意すれば, 直接計算でそれぞれ左不変であることがわかる. よって, $\mathfrak{g}_l(H_3) = \mathrm{span}\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$. これより $f : \mathfrak{h}_3 \to \mathfrak{g}_l(H_3) : A = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + (bx+c)\frac{\partial}{\partial z}$ は線型同型になる. また, 2 つの基底の括弧積は, それどれ以下の通りである:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}\right] = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \left[\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right] = 0, \quad \left[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x}\right] = 0.$$

これを用いれば, リー環準同型の条件 (ii) を満たすことは, 容易にわかる. よって, f はリー環同型写像. 従って, $\mathfrak{g}_l(H_3)$ と $\mathfrak{h}_3$ はリー環同型. □

参考文献

[1] 落合卓四郎: 微分幾何入門下, 東京大学出版会, 1993.

[2] 松本幸夫: 多様体の基礎, 東京大学出版会, 1988.

[3] 田丸博士: 2010 年度幾何学 D・多様幾何基礎講義 B 講義プリント, 2010.

[4] 松島与三: 多様体入門, 裳華房, 1980.