平成 26 年度卒業論文
サッカーの幾何学的考察：ゴールキーパーとディフェンダーのベストポジション

広島大学理学部数学科
B113809 柿木悠輔
指導教員 田丸博士 教授

2015 年 2 月 10 日

はじめに

私は中学校や高等学校で, 日常的なことの中に数学が関わっている例をたくさんみてきた. そこで, その一例としてサッカーを数学的に見ていこうと考えこの論文を書いた.

本研究の目的は, サッカーにおいてシューターを固定したときの守備側の最適なポジションを, 平面幾何学的に考察することである. 守備側がゴールキーパー 1 人のときは参考文献 [1] で考察されている. そこで本論文では, 守備側がゴールキーパーとディフェンダー 1 人の計 2 人の場合について考察した. なお, シュートコースは直線であると仮定する.

具体的には, 本論文ではまず [1] を参考にして, 守備側が 2 人の場合に守備側のボールの捕りやすさを表す関数 (距離比率関数) を定義し, それを用いて守備側にとっての最適なポジション (ベストポジション) を数学的に定義した. さらに, 主結果として, ゴールキーパーとディフェンダーの最適なポジションを具体的に求めた.

第一章では準備として, 平面幾何モデルと上記の距離比率関数の定義を紹介する. そして後の証明に用いるベストキャッチングポイント, ベストシュートコース, ベストポジションの定義を紹介する.

第二章では, 第一節でゴールキーパーとディフェンダーのベストキャッチングポイントを求める. そして第二節で後の証明に用いる妥当なポジションの定義を紹介し, そのときにおけるゴールキーパーとディフェンダーのベストキャッチングポイントを求める.

第三章では, 妥当なポジションにおけるシューターのベストシュートコースを求める.

第四章では, 第三章の結果を利用して, ゴールキーパーとディフェンダーのベストポジションを求める.

本論文を作成するにあたって, 指導教員の田丸博士教授をはじめ, ゼミ関係者の方々から多くのことを指導していただきました. 最後になりましたが, この場をお借りして深く御礼申し上げます.

目次

1　準備

この章では, 最適なポジションを定義するために, 守備側におけるボールの捕りやすさを表す関数を定義し, その関数を用いて最適な (ベスト) キャッチングポイント, シュートコース, ポジションを定義する.

以下では, シューターを S, ゴールキーパーを K, ディフェンダーを D, ゴールキーパーとディフェンダーのキャッチングポイントをそれぞれ C^K, C^D, ゴールポストを P_1, P_2, シュートコースを l とする.

定義 1.1. (S, K, D, l, C^K, C^D) が<u>**平面幾何モデル**</u> であるとは, 以下が成り立つこと:

(1) S, K, D は平面上の点.

(2) 線分 P_1P_2上の点 $P(P = P_1, P = P_2$も可) が存在し, $l = SP$.

(3) C^K, C^D は l 上の点.

以下, (S, K, D, l, C^K, C^D) を平面幾何モデルとする.

注意 1.2. 以下を仮定する:

(1) $\angle P_1SP_2 \leqq 90°$.

(2) K, D は $\triangle P_1SP_2$ の内部で境界線は含まない.

(3) $C^K, C^D \neq S$

2 点 A, B の距離を $|AB|$ と表す. このとき (3) より $|SC^K|, |SC^D| \neq 0$ が成り立つ.

ここでゴールキーパー, ディフェンダーの動く速さ, シュートの速さをそれぞれ v_K, v_D, v_S とし, 一定であるとする.

補題 1.3. 以下は必要十分条件である:

(1) ゴールキーパーがボールを捕ることができる.

(2) $\frac{|KC^K|}{v_K} \leqq \frac{|SC^K|}{v_S}$.

(3) $\frac{|KC^K|}{|SC^K|} \leqq \frac{v_K}{v_S}$.

証明. ゴールキーパーがボールを捕ることができるための必要十分条件は, ボールがキャッチングポイントまでいくのにかかる時間よりもゴールキーパーがキャッチングポイントまでいくのにかかる時間の方が短くなることである. すなわち (1) と (2) は同値である. (2) と (3) は簡単な式変形により同値が言える. よって (1), (2), (3) はすべて同値である. □

補題 1.4. 以下は必要十分条件である.

(1) ディフェンダーがボールを捕ることができる.

(2) $\frac{|DC^D|}{v_D} \leqq \frac{|SC^D|}{v_S}$.

(3) $\frac{|DC^D|}{|SC^D|} \leqq \frac{v_D}{v_S}$.

証明. 補題 1.3 の証明と同様. □

今から, 守備側のボールの捕りやすさを表す関数を定義する. 守備側であるゴールキーパーとディフェンダーは, それぞれ先の補題 1.3 と 補題 1.4 の (3) の左辺の値が小さいほど, ボールを捕りやすくなる. ゴールキーパーとディフェンダーのどちらか一方がボールに捕ることができれば良いので次のように定義する.

定義 1.5. 以下の関数 $\mathrm{DR}(S, K, D, l, C^K, C^D)$ を 距離比率関数 と呼ぶ:

$$\mathrm{DR}(S, K, D, l, C^K, C^D) := \min\left\{\frac{|KC^K|}{|SC^K|}, \frac{|DC^D|}{|SC^D|}\right\}.$$

また, $\mathrm{DR}(S, K, D, l, C^K, C^D) \geqq 0$ を保つ.

次に, 上で定義した距離比率関数を用いて, 平面幾何モデルにおけるベストキャッチングポイント, ベストシュートコース, ベストポジションを順に定義する.

定義 1.6. (S, K, D, l) に対して, (C_0^K, C_0^D) が ベストキャッチングポイント であるとは, 関数 $\mathrm{DR}(S, K, D, l, C^K, C^D)$ が $(C^K, C^D) = (C_0^K, C_0^D)$ で最小値をとること.

定義 1.7. 関数 $\mathrm{DR}(S, K, D, l)$ を次で定義する:

$$\mathrm{DR}(S, K, D, l) := \mathrm{DR}(S, K, D, l, C_0^K, C_0^D).$$

ここで, (C_0^K, C_0^D) は (S, K, D, l) に対するベストキャッチングポイント.

定義 1.8. (S, K, D) に対して, l_0 が ベストシュートコース であるとは, 関数 $\mathrm{DR}(S, K, D, l)$ が $l = l_0$ で最大値をとること.

定義 1.9. 関数 $\mathrm{DR}(S, K, D)$ を次で定義する:

$$\mathrm{DR}(S, K, D) := \mathrm{DR}(S, K, D, l_0).$$

ここで, l_0 は (S, K, D) に対するベストシュートコース.

定義 1.10. S に対して, (K_0, D_0) が ベストポジション であるとは, 関数 $\mathrm{DR}(S, K, D)$ が $(K, D) = (K_0, D_0)$ で最小値をとること.

注意 1.11. ベストキャッチングポイント, ベストシュートコース, ベストポジションは一意的とは限らない.

2 ゴールキーパー, ディフェンダーのベストキャッチングポイントと妥当なポジション

この章では, ベストキャッチングポイントについて調べる. また, ゴールキーパーとディフェンダーの妥当なポジションを定義する.

2.1 ゴールキーパー, ディフェンダーのベストキャッチングポイント

この節では, ゴールキーパーとディフェンダーのベストキャッチングポイントを求める. 以下, S, K, D, l を固定する.

補題 2.1. ゴールキーパー K, ディフェンダー D が共にシュートコース l 上にいないとする. このとき距離比率関数 DR は以下のように表せる:

$$\mathrm{DR}(S,K,D,l,C^K,C^D) = \min\left\{\frac{\sin(\angle C^K SK)}{\sin(\angle C^K KS)}, \frac{\sin(\angle C^D SD)}{\sin(\angle C^D DS)}\right\}.$$

証明. 仮定より S, K, D, C^K, C^D を用いて $\triangle SKC^K$, $\triangle SDC^D$ が作れる. よって, $\triangle SKC^K$, $\triangle SKC^D$ において正弦定理から

$$\frac{|KC^K|}{\sin(\angle C^K SK)} = \frac{|SC^K|}{\sin(\angle C^K KS)},\ \frac{|DC^D|}{\sin(\angle C^D SD)} = \frac{|SC^D|}{\sin(\angle C^D DS)}$$

が成り立つ. これを変形して DR の定義に代入すればよい. □

定理 2.2. 以下が成り立つ.

(1) ゴールキーパー K またはディフェンダー D がシュートコース l 上にいるとき, $C_0^K = K$ または $C_0^D = D$ ならば (C_0^K, C_0^D) がベストキャッチングポイントである.

(2) ゴールキーパー K とディフェンダー D がシュートコース l 上にいないとする. C'^K, C'^D をそれぞれ $\sin(\angle C^K KS), \sin(\angle C^D DS)$ が $C^K = C'^K$, $C^D = C'^D$ で最大値をとるようなキャッチングポイントとする. このとき, $(C^K, C^D) = (C'^K, C'^D)$ ならば (C'^K, C'^D) がベストキャッチングポイントである.

証明. まず (1) を示す. K または D が l 上にいて, $C_0^K = K$ または $C_0^D = D$ であるため, それぞれ

$$\mathrm{DR}(S,K,D,l,K,C^D) = 0,\ \mathrm{DR}(S,K,D,l,C^K,D) = 0$$

を満たす. よって $\mathrm{DR}(S,K,D,l,C^K,C^D)$ は最小値となり, (C_0^K, C_0^D) がベストキャッチングポイントとなる.

次に (2) を示す. 補題 2.1 より

$$\mathrm{DR}(S,K,D,l,C^K,C^D) = \min\left\{\begin{array}{l}\sin(\angle C^K SK)\cdot\frac{1}{\sin(\angle C^K KS)},\\ \sin(\angle C^D SD)\cdot\frac{1}{\sin(\angle C^D DS)}\end{array}\right\}$$

が成り立つ. C^K, C^D は l 上より, $\sin(\angle C^K SK)$, $\sin(\angle C^D SD)$ は一定である. ここで, C'^K, C'^D を $\sin(\angle C^K KS), \sin(\angle C^D DS)$ がそれぞれ $C^K = C'^K$, $C^D = C'^D$ で最大値をとるようなキャッチングポイントとする. このとき先の式から, $(C^K, C^D) = (C'^K, C'^D)$ のとき $\mathrm{DR}(S, K, D, l, C^K, C^D)$ は最小値となるので, (C'^K, C'^D) がベストキャッチングポイントとなる. □

2.2 妥当なポジションにおけるゴールキーパーとディフェンダーのベストキャッチングポイント

この節では, 妥当なポジションを定義する. また, 妥当なポジションにおけるベストキャッチングポイントについて調べる.

定義 2.3. ゴールキーパー K, ディフェンダー D が $\triangle SP_1P_2$ で 妥当なポジション であるとは, それぞれ $\angle SKP_1 \geqq 90°$ かつ $\angle SKP_2 \geqq 90°, \angle SDP_1 \geqq 90°$ かつ $\angle SDP_2 \geqq 90°$ を満たすことである.

命題 2.4. K, D が $\triangle SP_1P_2$ で妥当なポジションであり, l を K, D を含まないすべてのシュートコースとする. このとき, $\angle C_0^K KS = 90°$, $\angle C_0^D DS = 90°$ を満たすベストキャッチングポイント (C_0^K, C_0^D) が存在する.

証明. l を K, D を含まないシュートコースとする. K, D が $\triangle SP_1P_2$ で妥当なポジションであるから, それぞれ $\angle C_0^K KS = 90°$, $\angle C_0^D DS = 90°$ を満たすキャッチングポイント C_0^K, C_0^D が存在する. このとき, $\sin(\angle C_0^K KS), \sin(\angle C_0^D DS)$ は最大値となる. よって 定理 2.2 (2) より, (C_0^K, C_0^D) でベストキャッチングポイントである. □

3 シューターのベストシュートコース

この章では, シューターのベストシュートコースを求める.

以下 S, K, D を固定し, $\triangle SP_1P_2$ に対して K と D は妥当なポジションであるとする. また, シュートコース l を, P_1P_2 上の点 P を用いて $l = SP$ と表す.

補題 3.1. (S, K, D, SP) に対して, 以下が成り立つ.

(1) K または D が SP 上にいるとき:

$$\mathrm{DR}(S, K, D, SP) = 0.$$

(2) K と D が SP 上にいないとき:

$$\mathrm{DR}(S, K, D, SP) = \min\{\sin(\angle PSK), \sin(\angle PSD)\}.$$

証明. まず (1) を示す. K または D が SP 上の点なので, 定理 2.2 の (1) から主張が容易に示される.

次に (2) を示す. $K, D \notin SP$ とする. また, K, D は $\triangle SP_1P_2$ に対して K と D は妥当なポジションである. よって, 命題 2.4 より

$$\angle C_0^K KS = 90^\circ,\ \angle C_0^D DS = 90^\circ$$

を満たすベストキャッチングポイント (C_0^K, C_0^D) が存在する. また, $C_0^K, C_0^D \in SP$ なので,

$$\angle C_0^K SK = \angle PSK,\ \angle C_0^D SD = \angle PSD$$

が成り立つ. よって,

$$\frac{\sin(\angle C_0^K SK)}{\sin(\angle C_0^K KS)} = \sin(\angle PSK),\ \frac{\sin(\angle C_0^D SD)}{\sin(\angle C_0^D DS)} = \sin(\angle PSD)$$

が成り立つので, これらを補題 2.1 の右辺に代入すればよい. □

命題 3.2. P_3 を $\angle KSD$ の二等分線と P_1P_2 上の交点とし, P' を P_1P_2 上の点 $(P' \neq P_1, P_2, P_3)$ とする. このとき以下が成り立つ:

$$\mathrm{DR}(S, K, D, SP') < \max\{\mathrm{DR}(S, K, D, SP_i) \mid i = 1, 2, 3\}.$$

証明. 必要なら K と D, P_1 と P_2 を入れ替えることで, 次のいずれかが成り立つ.

(1) $K \in SP'$,

(2) $K, D \in \triangle SP'P_1$,

(3) $K \in \triangle SP'P_1$, $D \in \triangle SP'P_2$.

ここで, $\triangle SP'P_1$, $\triangle SP'P_2$ は各三角形の内部を表すとする.

(1) $K \in SP'$ のとき:

$$\mathrm{DR}(S,K,D,SP') < \mathrm{DR}(S,K,D,SP_1)$$

を示す. $K, D \notin SP_1$ より,

$$\mathrm{DR}(S,K,D,SP_1) > 0$$

が成り立つ. よって, $K \in SP'$ であるので補題 3.1 (1) より

$$\mathrm{DR}(S,K,D,SP') = 0 < \mathrm{DR}(S,K,D,SP_1).$$

(2) $K, D \in \triangle SP'P_1$ のとき:

$$\mathrm{DR}(S,K,D,SP') < \mathrm{DR}(S,K,D,SP_2)$$

を示す. K と D は SP', SP_2 上にいないので, 補題 3.1 (2) より,

$$\begin{aligned}\mathrm{DR}(S,K,D,SP') &= \min\{\sin(\angle P'SK), \sin(\angle P'SD)\} \\ &< \min\{\sin(\angle P_2SK), \sin(\angle P_2SD)\} \\ &= \mathrm{DR}(S,K,D,SP_2).\end{aligned}$$

(3) $K \in \triangle SP'P_1$, $D \in \triangle SP'P_2$ のとき:

$$\mathrm{DR}(S,K,D,SP') < \mathrm{DR}(S,K,D,SP_3)$$

を示す. K と D は SP', SP_3 上にいないので, 補題 3.1 (2) より,

$$\begin{aligned}\mathrm{DR}(S,K,D,SP') &= \min\{\sin(\angle P'SK), \sin(\angle P'SD)\} \\ &< \sin\left(\frac{\angle KSD}{2}\right) \\ &= \min\{\sin(\angle P_3SK), \sin(\angle P_3SD)\} \\ &= \mathrm{DR}(S,K,D,SP_3).\end{aligned}$$

よって, 主張が従う. □

定理 3.3. P_3 を $\angle KSD$ の二等分線と P_1P_2 上の交点とする. このとき以下が成り立つ:

$$l_0 : \text{ベストシュートコース} \Rightarrow l_0 \in \{SP_1, SP_2, SP_3\}.$$

証明. 対偶を示す. $l_0 \notin \{SP_1, SP_2, SP_3\}$ とする. このとき命題 3.2 より $\mathrm{DR}(S,K,D,l_0)$ は最大値をとらず, l_0 はベストシュートコースとならないので対偶は示された. □

4　ゴールキーパー, ディフェンダーのベストポジション

この章では, ゴールキーパー, ディフェンダーのベストポジションを求める.

以下では S を固定する. P, P_3 をそれぞれ $\angle P_1SP_2, \angle KSD$ の二等分線と P_1P_2 上の交点とし, $\triangle SP_1P_2$ に対して K, D を妥当なポジションとする.

補題 4.1. 以下が成り立つ.

(1) S, K, D が同一直線上にいるとき:

$$\mathrm{DR}(S, K, D) = \max\{\sin(\angle P_iSK) \mid i = 1, 2\}.$$

(2) S, K, D が同一直線上にいないとき:

$$\mathrm{DR}(S, K, D) = \max\left\{\begin{array}{l}\min\{\sin(\angle P_1SK), \sin(\angle P_1SD)\}, \\ \min\{\sin(\angle P_2SK), \sin(\angle P_2SD)\}, \\ \sin(\angle P_3SK)\end{array}\right\}.$$

証明. (1) を示す. S, K, D が同一直線上にいるとすると, K, D は線分 SP_3 上の点である. また $\angle P_iSK = \angle P_iSD$ $(i = 1, 2)$ である. よって l_0 をベストシュートコースとすると, 補題 3.1 (1) と (2) と 定理 3.3 の主張を用いて

$$\begin{aligned}\mathrm{DR}(S, K, D) &:= \mathrm{DR}(S, K, D, l_0) \\ &= \max\{\mathrm{DR}(S, K, D, SP_i) \mid i = 1, 2, 3\} \\ &= \max\{\mathrm{DR}(S, K, D, SP_i) \mid i = 1, 2\} \\ &= \max\{\sin(\angle P_iSK) \mid i = 1, 2\}.\end{aligned}$$

(2) を示す. S, K, D が同一直線上にいないとする. このとき S, K, D は $SP_i (i = 1, 2, 3)$ 上にいないので, 補題 3.1 (2) を用いれば主張が従う. □

補題 4.2. $i, j \in \{1, 2\}$ で $i \neq j$ とする.

(1) $K, D \in \triangle SP_iP$ (ただし, 辺 SP のみ含む) のとき, ベストシュートコースは SP_j であり, 次が成り立つ:

$$\mathrm{DR}(S, K, D) \geqq \sin\left(\frac{\angle P_1SP_2}{2}\right),$$

(2) $K \in \triangle SP_iP$, $D \in \triangle SP_jP$ (ただし, 辺は含まない) のとき, 次が成り立つ:

$$\mathrm{DR}(S, K, D) = \max\left\{\sin(\angle P_iSK), \sin(\angle P_jSD), \sin(\angle P_3SK)\right\} < \sin\left(\frac{\angle P_1SP_2}{2}\right)$$

証明. $i = 1$, $j = 2$ のときのみを示す.

(1) $K, D \in \triangle SP_1P$ とする．$K, D \notin \{SP_1, SP_2\}$ であるので, 補題 3.1 (2) より,

$$\begin{aligned}\mathrm{DR}(S,K,D,SP_1) &= \min\{\sin(\angle P_1SK), \sin(\angle P_1SD)\}\\ &< \min\{\sin(\angle P_2SK), \sin(\angle P_2SD)\}\\ &= \mathrm{DR}(S,K,D,SP_2)\end{aligned}$$

が成り立つ．また S, K, D が同一直線上にない, すなわち, $K, D \notin SP_3$ であるときは, 上と同様にして

$$\mathrm{DR}(S,K,D,SP_3) < \mathrm{DR}(S,K,D,SP_2)$$

が成り立つ．一方, S, K, D が同一直線上にある, すなわち, $K, D \in SP_3$ であるときは, 補題 3.1 (1) より,

$$\mathrm{DR}(S,K,D,SP_3) = 0 < \mathrm{DR}(S,K,D,SP_2)$$

が成り立つ．よって定理 3.3 より, SP_2 がベストシュートコースである．よって,

$$\begin{aligned}\mathrm{DR}(S,K,D) &= \mathrm{DR}(S,K,D,SP_2)\\ &= \min\{\sin(\angle P_2SK), \sin(\angle P_2SD)\}\\ &\geqq \sin\left(\frac{\angle P_1SP_2}{2}\right)\end{aligned}$$

となる．

(2) $K \in \triangle SP_1P$, $D \in SP_2P$ とする．このとき,

$$\min\{\sin(\angle P_1SK), \sin(\angle P_1SD)\} = \sin(\angle P_1SK) < \sin\left(\frac{\angle P_1SP_2}{2}\right),$$

$$\min\{\sin(\angle P_2SK), \sin(\angle P_2SD)\} = \sin(\angle P_2SD) < \sin\left(\frac{\angle P_1SP_2}{2}\right),$$

$$\sin(\angle P_3SK) = \sin\left(\frac{\angle KSD}{2}\right) < \sin\left(\frac{\angle P_1SP_2}{2}\right)$$

が成り立つ．S, K, D は同一直線上にないので, 補題 4.1 (2) より,

$$\mathrm{DR}(S,K,D) = \max\{\sin(\angle P_1SK), \sin(\angle P_2SD), \sin(\angle P_3SK)\} < \sin\left(\frac{\angle P_1SP_2}{2}\right)$$

が成り立つ． □

上の補題から直ちに次が従う．

命題 4.3. (K_0, D_0) がベストポジションならば, K_0, D_0 は SP ($\angle P_1SP_2$ の二等分線) に関して逆側の位置にある．すなわち, 異なる $i, j \in \{1, 2\}$ が存在して, $K_0 \in \triangle SP_iP$, $D_0 \in SP_jP$ を満たす．

上の命題から, ゴールキーパー K とディフェンダー D のベストポジションを求めるためには, K と D が SP に関して逆側の位置にある場合だけ考えればよい.

ここで, m_i $(i=1,2)$ を $\angle P_iSP$ の二等分線とする.

補題 4.4. $i,j \in \{1,2\}$ で $i \neq j$ とする. $(K,D) \in m_i \times m_j$ のとき, 以下が成り立つ:

$$\mathrm{DR}(S,K,D) = \sin\left(\frac{\angle P_1SP_2}{4}\right).$$

証明. $i=1$, $j=2$ のときのみを示す. $(K,D) \in m_1 \times m_2$ とする. このとき,

$$\angle P_1SK = \angle P_2SD = \angle P_3SK = \frac{\angle P_1SP_2}{4}$$

が成り立つ. したがって, 仮定から $K \in \triangle SP_1P$, $D \in \triangle SP_2P$ なので, 補題 4.2 (2) より

$$\mathrm{DR}(S,K,D) = \max\{\sin(\angle P_1SK), \sin(\angle P_2SD), \sin(\angle P_3SK)\} = \sin\left(\frac{\angle P_1SP_2}{4}\right)$$

が成り立つ. □

定理 4.5. K, D を $\triangle SP_1P_2$ に対して妥当なポジションとし, m_i $(i=1,2)$ を $\angle P_iSP$ の二等分線とする. このとき (K_0, D_0) がベストポジションであることは, $(K_0,D_0) \in m_1 \times m_2$ または $(K_0,D_0) \in m_2 \times m_1$ であることと同値である.

証明. (K_0,D_0) が $\triangle SP_1P_2$ に対してベストポジションであると仮定する. K_0 が P_1 側, D_0 が P_2 側のときのみを示す.

$K_0 \in m_1$ を示す. 背理法で示す.

$K_0 \notin m_1$ とする.

(i) K_0 が m_1 に対して P_1 側にいるとき,

$$\angle P_1SK_0 < \frac{\angle P_1SP_2}{4} < \max\{\angle P_2SD_0, \angle P_3SK_0\}$$

が成り立つ. よって, $M_1 \in m_1$, $M_2 \in m_2$ とすると, 補題 4.4 より,

$$\begin{aligned}\mathrm{DR}(S,K_0,D_0) &> \sin\left(\frac{\angle P_1SP_2}{4}\right)\\ &= \mathrm{DR}(S,M_1,M_2)\end{aligned}$$

となり, (K_0,D_0) がベストポジションであることに矛盾する.

(ii) K_0 が m_1 に対して P 側にいるとき,

$$\angle P_1SK_0 > \frac{\angle P_1SP_2}{4}$$

が成り立つ．よって，$M_1 \in m_1$, $M_2 \in m_2$ とすると，補題 4.4 より，

$$\begin{aligned}\mathrm{DR}(S, K_0, D_0) &= \max\{\sin(\angle P_1SK_0), \sin(\angle P_2SD_0), \sin(\angle P_3SK_0)\} \\ &> \sin\left(\frac{\angle P_1SP_2}{4}\right) \\ &= \mathrm{DR}(S, M_1, M_2)\end{aligned}$$

となり，(K_0, D_0) がベストポジションであることに矛盾する．

よって，$K_0 \in m_1$ である．$D_0 \in m_2$ も同様に従い，$(K_0, D_0) \in m_1 \times m_2$ が成り立つ．次に，$(K_0, D_0) \in m_1 \times m_2$ であると仮定する．$(K, D) = (K_0, D_0)$ のとき $\mathrm{DR}(S, K, D)$ が最小値となればよい．$K \in m_1$ のときは $K = K_0$, $K \notin m_1$ のときは先の証明 (i), (ii) を考慮し，また，D も同様に考慮すると，

$$\begin{aligned}\mathrm{DR}(S, K, D) &= \max\{\sin(\angle P_1SK), \sin(\angle P_2SD), \sin(\angle P_3SK)\} \\ &\geqq \max\{\sin(\angle P_1SK_0), \sin(\angle P_2SD_0), \sin(\angle P_3SK_0)\} \\ &= \sin\left(\frac{\angle P_1SP_2}{4}\right) \\ &= \mathrm{DR}(S, K_0, D_0)\end{aligned}$$

が成り立ち，主張が従う．$(K_0, D_0) \in m_2 \times m_1$ のときも同様に従う． □

参考文献

[1] Kamigaki, M., Tamaru, H., Yogi, T.: *Plane geometry of soccer : the best positioning of a goalkeeper*, preprint.