

2005 年度数学通論 II 期末試験問題

担当：田丸

以下、全ての問いの解答において、まず最初に証明すべきことを明確に記述すること。この試験では、証明を正確に正しい順序で書くことができることを要請しています。そのことを意識して答案を書くようにして下さい。

定義. 位相空間 (S, \mathcal{U}) と、その部分集合 $A \subset S$ に対し、 $\mathcal{U}_A := \{A \cap U \mid U \in \mathcal{U}\}$ を、 \mathcal{U} から決まる A の相対位相と呼ぶ。

定義. 位相空間 (S, \mathcal{U}_S) から集合 T への写像 $f : S \rightarrow T$ が全射とする。このとき、次を f から決まる T の商位相と呼ぶ： $\mathcal{U}_f := \{V \subset T \mid f^{-1}(V) \in \mathcal{U}_S\}$ 。

問 1. $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ を考える。 \mathbb{R}^2 の標準的な位相から決まる S^1 の相対位相を \mathcal{U} , 写像 $f : \mathbb{R} \rightarrow S^1 : t \mapsto (\cos t, \sin t)$ から決まる S^1 の商位相を \mathcal{U}_f とする。 $U := \{(\cos t, \sin t) \in S^1 \mid 0 < t < \pi\}$ とする。

(1) U は \mathcal{U} に関して開集合かどうかを予想し、それを示せ。(10)

(2) U は \mathcal{U}_f に関して開集合かどうかを予想し、それを示せ。(10)

定義. 位相空間が 連結 とは、開かつ閉になる集合が自明なものに限ること。

問 2. 位相空間 X, Y および連続写像 $f : X \rightarrow Y$ に対し、「 X が連結ならば Y も連結である」という命題を $(*)$ とする。

(1) f が単射のとき、 $(*)$ が正しければそれを証明し、正しくなければ反例を挙げよ。(15)

(2) f が全射のとき、 $(*)$ が正しければそれを証明し、正しくなければ反例を挙げよ。(15)

定義. 位相空間 S_1, S_2 を考える。直積集合 $S_1 \times S_2$ 上の、自然な射影が連続となるような最も弱い位相を 積位相 と呼ぶ。ここで自然な射影とは、 $\pi_i : S_1 \times S_2 \rightarrow S_i : (x_1, x_2) \mapsto x_i$ ($i = 1, 2$) のこと。

問 3. \mathbb{R} には標準的な位相が入っているものとする。 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上の積位相に関して、次の集合は開集合であることを示せ： $U := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ 。(15)

定義. 単体的複体 K の ℓ 次鎖群を $C_\ell(K, \mathbb{Z})$, 境界写像を ∂ で表す。このとき、 ℓ 次ホモロジー群を、 $H_\ell(K, \mathbb{Z}) := Z_\ell(K, \mathbb{Z})/B_\ell(K, \mathbb{Z})$ で定義する。ただしここで、 $Z_\ell(K, \mathbb{Z}) := \text{Ker} [\partial : C_\ell \rightarrow C_{\ell-1}]$, $B_\ell(K, \mathbb{Z}) := \text{Im} [\partial : C_{\ell+1} \rightarrow C_\ell]$ 。

問 4. 単体的複体 $K := \{(v_0), (v_1), (v_2), (v_0, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_0), (v_0, v_1, v_2)\}$ の 1 次ホモロジー群 $H_1(K, \mathbb{Z})$ を求めよ。(20)

問 5. 閉区間 $[0, 1]$ と円周 S^1 は位相同型でないことを示せ(なお、単体的複体のホモロジー群やオイラー数が位相不変量であることを用いて良い)。(15)

追加. ヤマを張って外れた問題があったらその問題と解答を書け。(10 点程度補填)

追加. 講義に関する意見・感想・コメント・要望がありましたら答案に書いて下さい。