

# 2005 年度数学通論 II 中間試験問題

担当：田丸

以下、全ての問いの解答において、まず最初に証明すべきことを明確に記述すること。この試験では、証明を正確に正しい順序で書くことができることを要請しています。そのことを意識して答案を書くようにして下さい。

問 1.  $\mathbb{R}$  の標準的な位相を  $\mathcal{U}$  とする。  $\mathcal{U}$  は、次の (1), (2) のどちらかは満たさない。満たさない方はどちらかを答え、その例を挙げよ。(10)

$$(1) \forall \{U_\lambda\} \subset \mathcal{U}, \bigcup U_\lambda \in \mathcal{U}, \quad (2) \forall \{U_\lambda\} \subset \mathcal{U}, \bigcap U_\lambda \in \mathcal{U}.$$

定義. 集合  $S$  に対し、  $\mathcal{U}^t := \{\emptyset, S\}$  を密着位相と呼ぶ。位相空間から位相空間への写像が連続であるとは、開集合の逆像が開集合となること。

問 2.  $\mathbb{R}$  の標準的な位相を  $\mathcal{U}$ 、密着位相を  $\mathcal{U}^t$  で表し、恒等写像  $\text{id.} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を考える。

(1) 写像  $\text{id.} : (\mathbb{R}, \mathcal{U}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{U}^t)$  が、連続であるかないかを予想し、それを示せ。(10)

(2) 写像  $\text{id.} : (\mathbb{R}, \mathcal{U}^t) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{U})$  が、連続であるかないかを予想し、それを示せ。(10)

定義. 位相空間がコンパクトとは、任意の開被覆に対して有限部分被覆が存在すること。

問 3.  $S, T$  を位相空間、  $f : S \rightarrow T$  を全射な連続写像とする。このとき、  $S$  がコンパクトならば  $T$  もコンパクトであることを示せ。(20)

定義. 位相空間が連結とは、開かつ閉になる集合が自明なものに限ること。位相空間の部分集合が閉集合とは、補集合が開集合となること。

問 4. 位相空間  $(S, \mathcal{U})$  が連結でないとする。このとき、次が成り立つことを示せ。(10)

$$\exists U, V \in \mathcal{U} \text{ s.t. } S = U \cup V, U \cap V = \emptyset, U \neq \emptyset, V \neq \emptyset.$$

定義. 位相空間がハウスドルフ空間であるとは、任意の 2 点が開集合で分離できること。

問 5. 距離空間  $(S, \rho)$  はハウスドルフ空間であることを示せ。(10)

定義. 位相空間が第 1 可算公理を満たすとは、任意の点で高々可算な基本近傍系が存在すること。  $\mathcal{N}(x)$  が  $x$  での基本近傍系とは、  $x$  の任意の近傍に対して、それより小さい  $\mathcal{N}(x)$  の元が存在すること。位相空間が第 2 可算公理を満たすとは、高々可算な開基が存在すること。  $\mathcal{B}$  が開基とは、任意の開集合が  $\mathcal{B}$  の部分集合族の和集合で表せること。

問 6.  $\mathbb{R}$  の離散位相を  $\mathcal{U}^d$  とする。

(1)  $(\mathbb{R}, \mathcal{U}^d)$  は第 1 可算公理を満たすかどうかを予想し、それを示せ。(10)

(2)  $(\mathbb{R}, \mathcal{U}^d)$  は第 2 可算公理を満たすかどうかを予想し、それを示せ。(10)

定義. 位相空間が弧状連結とは、任意の 2 点が連続な道で結べること。

問 7. 連続写像  $f : S \rightarrow T$  が全射であるとする。  $S$  が弧状連結ならば  $T$  も弧状連結であることを示せ。(10)

追加. ヤマを張って外れた問題があったらその問題と解答を書け。(10 点程度補填)

追加. 講義に関する意見・感想・コメント・要望がありましたら答案に書いて下さい。