折り目写像のトポロジーについて

（近畿大学理工学部　佐久間一浩）

『微分位相幾何学 (Differential Topology)』とは，微分可能多様体 (differentiable manifolds) をその間の微分可能写像 (differentiable maps) を用いて研究する分野です。

古典的な基本問題を挙げると，微分可能多様体 M_1，M_2 が与えられたとき，次の 2 つは代表的なものです（J. Milnor, *Differential Topology*, in “Lectures in Modern Mathematics II”, ed. by T. L. Saaty; Wiley, New York (1964), 165–183 の冒頭より）：

- $\dim M_1 = \dim M_2$ ならば，いつ M_1 と M_2 の間に微分同相写像 (diffeomorophism) が存在するか否かを判定せよ．
- $\dim M_1 < \dim M_2$ ならば，いつ M_1 から M_2 への埋め込み写像 (embedding) あるいははめ込み写像 (immersion) が存在するか否かを判定せよ．存在する場合には，それらの写像を分類せよ．

これらの問題をひとつの文に纏めると，次のようになります：

> “微分可能多様体 M_1，M_2 が与えられたとき，M_1 から M_2 への ‘良い’ 写像が存在するか否かを判定せよ！”

‘良い’ 写像をどのように定義するかによって問題の様子は異なってきますが，上では多様体の次元によって場合分けして，$\dim M_1 = \dim M_2$ ならば，良い写像を微分同相写像に，$\dim M_1 < \dim M_2$ ならば，はめ込み・埋め込み写像に設定しています。

場合分けで欠落しているのが，$\dim M_1 > \dim M_2$ のときで，問題は次のようになります：

> “微分可能多様体 M_1，M_2 が与えられ，$\dim M_1 > \dim M_2$ のとき，M_1 から M_2 への ‘良い’ 写像が存在するか否かを判定せよ！”

この問題の一番簡単な場合が $M_2 = \mathbb{R}$ のときで，良い写像の候補は，モース関数を除いて他には無いでしょう。しかし，問題の解はほぼ自明で，“任意の多様体について存在する”，となります。そこで，本講演では M_2 が p 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^p$ で，$p \geq 2$ のとき，良い写像としてモース関数の拡張にあたる折り目写像を採用して，その定義と既存の結果や証明の方法論の背景，さらには私が最近得た結果などについて概説します。