解析学 I　チェックリスト－級数（その 1）－　（2024.6.27 配布）

プリントは http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R6Kai1.html にも置いてあります.

1 $\{a_n\}$ を数列とするとき，次の各問に答えよ.

(1) 「級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が**収束**する」ことの定義を述べよ．またそのとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の**和**はどう定義されるか.

(2) 「級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が**絶対収束**する」ことの定義を述べよ.

(3) 「級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が**条件収束**する」ことの定義を述べよ.

(4) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ が収束するような実数 r の範囲を求めよ.

(5) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ が収束するような実数 s の範囲を求めよ.

2 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を数列とする．次の各命題の真偽を判定し，その理由を述べよ．（裏面に各命題の真偽についてのみ解答を掲載しました．理由が分からないという方は質問して下さい.）

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が正項級数であるならば，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束するか $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ であるかのどちらかである.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.

(4) 絶対収束する級数は，必ず収束する.

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束し，かつ $a_n \leq b_n\ (\forall n \in \mathbb{N})$ であるならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ である.

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束し，かつ $a_n < b_n\ (\forall n \in \mathbb{N})$ であるならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ である.

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束し，かつ $a_n \neq 0\ (\forall n \in \mathbb{N})$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ である.

(8) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\displaystyle\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ が成り立つならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束するならば，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ も絶対収束する.

(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束するならば，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\frac{1}{2}}$ も絶対収束する.

(11) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ を正項級数とする．$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束し，かつ数列 $\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}$ が収束するならば $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ も収束する．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 真　(2) 真　(3) 偽　(4) 真　(5) 真　(6) 真　(7) 偽　(8) 偽　(9) 真　(10) 偽　(11) 真