解析学 I　チェックリスト－数列－ （2024.6.21 配布）

プリントは http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R6Kai1.html にも置いてあります．

1 $\{a_n\}$ を数列，$\alpha \in \mathbb{R}$ とするとき，次の (1)〜(8) の定義を論理記号を用いて述べよ．また，(9), (10) の問に答えよ．

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$　(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$　(3) $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

(4) $\{a_n\}$ が収束する．　(5) $\{a_n\}$ が発散する．

(6) $\{a_n\}$ が単調増加数列である．　(7) $\{a_n\}$ が狭義単調増加数列である．

(8) $\{a_n\}$ がコーシー列である．

(9) $\{a_n\}$ の部分列とはどういうものであるか説明せよ．

(10) **ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理**のステートメントを述べよ．

2 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を数列とする．次の各命題の真偽を判定し，その理由を述べよ．（裏面に各命題の真偽についてのみ解答を掲載しました．理由が分からないという方は質問して下さい.）

(1) 数列 $\{a_n + b_n\}, \{a_n - b_n\}$ が共に収束するならば，$\{a_n\}, \{b_n\}$ は共に収束する．

(2) 数列 $\{a_n + b_n\}, \{a_n b_n\}$ が共に収束するならば，$\{a_n\}, \{b_n\}$ は共に収束する．

(3) 全ての項が有理数であるような数列 $\{a_n\}$ が収束するならば，極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ も有理数である．

(4) 有界な数列は必ず収束する．

(5) 有界でない数列は必ず発散する．

(6) 上に有界でない数列は必ず ∞ に発散する．

(7) $a_n \neq 0\ (\forall n \in \mathbb{N})$ かつ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であるならば，$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$ である．

(8) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ ならば，$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0$ である．

(9) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ ならば，$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \infty$ である．

(10) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ ならば，$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$ である．

(11) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ ならば，$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = -1$ である．

(12) $a_n = \sin n$ で定義される数列 $\{a_n\}$ には収束する部分列が存在する．

(13) 収束する数列 $\{a_n\}$ の部分列は必ず収束する．

(14) 発散する数列 $\{a_n\}$ の部分列は必ず発散する．

(15) ∞ に発散する数列 $\{a_n\}$ の部分列は必ず ∞ に発散する．

(16) コーシー列は有界列である．

$\boxed{3}$ A を空でない実数の部分集合，$\{a_n\}, \{b_n\}$ を数列，$\alpha \in \mathbb{R}$ とする．次の各命題を証明せよ．

(1) $\{a_n\}, \{b_n\}$ が共に収束列で $a_n \leq b_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ ならば，$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$.

(2) $a_n \geq 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ であり $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば，$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\alpha}$.

(3) $a_n \geq 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ であり $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ならば，$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \infty$.

(4) $\alpha = \sup A$ が存在するとき，次の二つの性質を満たす数列 $\{a_n\}$ が存在する．

(i) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \in A$.　　(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

(5) 部分列 $\left\{a_{2k-1}\right\}_{k=1}^{\infty}, \left\{a_{2k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ が共に収束し，$\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} a_{2k} = \alpha$ ならば，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ が成り立つ．

$\boxed{2}$ (1) 真　(2) 偽　(3) 偽　(4) 偽　(5) 真　(6) 偽　(7) 偽　(8) 偽　(9) 真　(10) 真　(11) 偽　(12) 真　(13) 真　(14) 偽　(15) 真　(16) 真