解析学 I　チェックリスト－実数の連続性－　（2024.6.13 配布）

プリントは http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R6Kai1.html にも置いてあります．

1 A を空でない $\mathbb{R}$ の部分集合とする．次の各概念の正確な定義を，**論理記号を用いて**述べよ．（解答は教科書や各自のノートで確かめよ）

(1) $a \in \mathbb{R}$ が A の**上界**である．
(2) $a \in \mathbb{R}$ が A の**下界**である．
(3) A が**上に有界**である．
(4) A が**下に有界**である．
(5) A が**有界**である．
(6) $m \in \mathbb{R}$ が A の**最大値**である．
(7) $m \in \mathbb{R}$ が A の**最小値**である．
(8) $m \in \mathbb{R}$ が A の**上限**である．
(9) $m \in \mathbb{R}$ が A の**下限**である．

2 次の性質がどういうものであるか説明せよ．

(1) 実数の連続性　(2) アルキメデス性　(3) 有理数の稠密性

3 A, B を空でない $\mathbb{R}$ の部分集合とする．次の各命題の真偽を判定し，その理由を述べよ．（裏面に各命題の真偽についてのみ解答を掲載しました．理由が分からないという方は質問して下さい.）

(1) A には必ず上限 $\sup A$ が存在する．
(2) A の上限 $\sup A$ が存在するとき，A は必ず上に有界である．
(3) A の上限 $\sup A$ が存在するとき，$\sup A$ は必ず A の元である．
(4) A の上限 $\sup A$ が存在するとき，$\sup A$ は必ず A の上界である
(5) $\sup A$ も $\max A$ も存在するが，$\sup A \neq \max A$ を満たす集合 A が存在する．
(6) $\inf A$ も $\sup A$ も存在するとき，$\inf A \leq \sup A$ が必ず成り立つ．
(7) $\inf A$ も $\sup A$ も存在するとき，$\inf A < \sup A$ が必ず成り立つ．
(8) A の上界全体の集合と，A の下界全体の集合が一致することはない．
(9) 任意の $x \in A$ に対して $x < 0$ であると仮定する．このとき $\sup A < 0$ である．
(10) A, B を上に有界な集合とする．$A \subset B$ ならば，$\sup A \leq \sup B$ である．
(11) A, B を上に有界な集合とする．$A \subset B$ かつ $A \neq B$ ならば，$\sup A < \sup B$ である．
(12) A の任意の元が有理数であるとする．もし $\sup A$ が存在するならば，$\sup A$ も有理数である．
(13) $A \subset \mathbb{N}$ であるならば，$\inf A$ が存在する．

$\boxed{3}$ (1) 偽　(2) 真　(3) 偽　(4) 真　(5) 偽　(6) 真　(7) 偽　(8) 偽　(9) 偽　(10) 真　(11) 偽
(12) 偽　(13) 真