数理解析学 A・数理解析基礎講義 A　メモ

本講義における定義，命題，定理等について，その内容を簡単にまとめたものです．本講義の流れを理解するための一助としていただければ幸いです．

１．ノルム空間と完備性

Def. **線形空間** → 補足プリント No.1

Def. X を線形空間とする．

① **一次独立・一次従属**　② X が **n 次元** である（$\dim X = n$）　③ X が**無限次元**

Th. X を線形空間とする．$\dim X = n$ であることの必要十分条件は次が成立することである．

$\exists u_1, \dots, u_n \in X$ s.t.

(i) $u_1, \dots, u_n$ は一次独立である．

(ii) $\forall u \in X$, $\exists! \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ s.t. $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$.　→ 演習問題 No.1 **[3]**

Def. **（線形）部分空間** → 補足プリント No.1

Def. **ノルム** $\|\cdot\|$，**ノルム空間** $(X, \|\cdot\|)$

Prop. $(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間，$u, v \in X$ とすると，$\big|\|u\| - \|v\|\big| \leq \|u - v\|$.

Def. ノルム空間 X において，点列 (u_n) が u に**収束**するとは……

Prop. $(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間，$(u_n), (v_n) \subset X$, $u, v \in X$, $(\alpha_n) \subset \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ とする．

① $u_n \to u$, $v_n \to v$ $(n \to \infty)$ $\implies$ $u_n + v_n \to u + v$ $(n \to \infty)$.

② $\alpha_n \to \alpha$, $u_n \to u$ $(n \to \infty)$ $\implies$ $\alpha_n u_n \to \alpha u$ $(n \to \infty)$.　→ 演習問題 No.1 **[5]**

Prop.（ノルムの連続性） $(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする．このとき，$u_n \to u$ $(n \to \infty)$ ならば $\|u_n\| \to \|u\|$ $(n \to \infty)$ である．

Def. **ε-近傍**，**開集合**，**閉集合**，**集積点**，**閉包**，**稠密**，**可分** → 補足プリント No.1

Def. 二つのノルム $\|\cdot\|$ と $|||\cdot|||$ が**同値**であるとは……

Prop. X 上の二つのノルム $\|\cdot\|$ と $|||\cdot|||$ が同値であれば，$(X, \|\cdot\|)$ で定まる位相と $(X, |||\cdot|||)$ で定まる位相は等しい．

Def. ノルム空間 X 上の点列 (u_n) が **Cauchy 列** であるとは……

Def. **Banach 空間**

Ex. $\big(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty\big)$ は Banach 空間．ただし，$f \in C([a,b])$ に対し $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

2．いろいろな関数空間

① $C_\infty(\mathbb{R}^N)$, $C_0(\mathbb{R}^N)$

Def. 関数 $f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{C}$ の**台（support）** $\operatorname{supp} f$ とは……

Th. $f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{C}$ に対して $\|f\|_\infty=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)|$ とおく．

(1) ノルム空間 $(C_\infty(\mathbb{R}^N),\|\cdot\|_\infty)$ は Banach 空間である． →演習問題 No.2 [**12**](1)

(2) ノルム空間 $(C_0(\mathbb{R}^N),\|\cdot\|_\infty)$ は Banach 空間ではない． →演習問題 No.2 [**12**](2)

② $\mathcal{B}^m(I)$, $\mathcal{B}^m(\Omega)$

Th. $\mathcal{B}^m(I)$, $\mathcal{B}^m(\Omega)$ は Banach 空間である．

③ $L^p(\Omega)$（ただし $1\le p<\infty$）

Th. $\big(L^p(\Omega),\|\cdot\|_p\big)$ はノルム空間である．

Prop.（Minkowski の不等式） $f,g\in L^p(\Omega)\Longrightarrow \|f+g\|_p\le\|f\|_p+\|g\|_p$.

Lem.（Hölder の不等式） $1<p<\infty$ とし，q を $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ で定める．このとき，$f\in L^p(\Omega)$, $g\in L^q(\Omega)$ ならば $\left|\displaystyle\int_\Omega f(x)g(x)\,dx\right|\le\|f\|_p\|g\|_q$.

Rem. $p=q=2$ のときは **Cauchy-Schwarz の不等式**と呼ばれる．

Th.（$L^p(\Omega)$ の完備性） $(f_m)\subset L^p(\Omega)$ が Cauchy 列ならば，ある $f\in L^p(\Omega)$ が存在して $\lim\limits_{m\to\infty}\|f_m-f\|_p=0$ が成立する．

また，(f_m) の部分列 (f_{m_k}) をうまくとって $\lim\limits_{k\to\infty}f_{m_k}(x)=f(x)$ a.e.$x\in\Omega$ とすることができる．

Rem. ここまでの定理は一般の測度空間でも成り立つ．

Th. $1\le p<\infty$ ならば，$C_0(\mathbb{R}^N)$ は $L^p(\mathbb{R}^N)$ で稠密である．

Rem. この定理の証明は Lebesgue 測度の性質を用いている．

④ 数列空間 ℓ^p（ただし $1\le p<\infty$）

Th. $\big(\ell^p,\|\cdot\|_{\ell^p}\big)$ は Banach 空間である．

⑤ $L^\infty(\Omega)$

Th. $\big(L^\infty(\Omega),\|\cdot\|_\infty\big)$ は Banach 空間である． → 演習問題 No.4 [**23**]

⑥ 数列空間 ℓ^∞

Th. $\big(\ell^\infty,\|\cdot\|_{\ell^\infty}\big)$ は Banach 空間である．

３．Banach 空間の性質

Th. X を Banach 空間，M を X の部分空間とする．このとき，M が X のノルムをノルムとして Banach 空間となるための必要十分条件は，M が X の閉部分空間であることである．

Prop.（直積 Banach 空間） $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ を Banach 空間とする．このとき，線形空間 $X \times Y = \{(u,v) \mid u \in X, v \in Y\}$ は $\|(u,v)\| = \|u\|_X + \|v\|_Y$ でノルムを定義すると Banach 空間となる． → 演習問題 No.4 [**30**](1)

Lem. X をノルム空間とする．このとき，X が完備であるための必要十分条件は次が成り立つことである．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\| < \infty \text{ となる } X \text{ の任意の点列 } (u_n) \text{ に対し，} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ は収束する．}$$

Def./Prop.（商空間） X を Banach 空間，Y を X の閉部分空間とする．商空間 X/Y の元 $[u]$ のノルムを $\|[u]\| = \inf_{v \in Y} \|u - v\|_X$ と定めると，X/Y は Banach 空間である．

Th. X を**有限次元**ノルム空間とし，$|\cdot|$, $\|\cdot\|$ を X をノルムとするとき，$|\cdot|$ と $\|\cdot\|$ は同値である．

Cor. 有限次元ノルム空間は Banach 空間である．

Cor. X を Banach 空間とし，Y を X の有限次元部分空間とする．このとき，Y は閉部分空間である．

Lem. X を Banach 空間とし，Y を X の閉部分空間で $Y \neq X$ とする．このとき，次が成立する．

$$\forall c \in (0,1),\ \exists u \in X \text{ s.t. } \|u\|_X = 1 \text{ かつ } \|[u]\| > c.$$

Th. X を Banach 空間とする．このとき，$\overline{B(0,1)} = \{u \in X \mid \|u\| \leq 1\}$ がコンパクトであることと X が有限次元であることは同値である．

Th.（完備化） $(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする．このとき，次の (i), (ii) を満たす Banach 空間 $(\widetilde{X}, \|\cdot\|')$ と線形写像 $i : X \to \widetilde{X}$ が存在する．

(i) i は単射であり，かつ任意の $u \in X$ に対して $\|i(u)\|' = \|u\|$.
(ii) X の i による像 $i(X)$ は $\widetilde{X}$ において稠密である．

しかも，(i), (ii) を満たす Banach 空間 $(\widetilde{X}, \|\cdot\|')$ は同型を除いて一意に定まる．

→ 補足プリント No.3

４．Hilbert 空間

Def.　**内積** $(\cdot,\cdot)$，**内積空間** $\big(H,(\cdot,\cdot)\big)$

Prop.（Schwarz の不等式）　H を内積空間とするとき，任意の $u,v\in H$ に対して $|(u,v)|^2 \le (u,u)\,(v,v)$ が成り立つ．

Def./Prop.　H を内積空間とする．$u\in H$ に対して $\|u\| = (u,u)^{\frac{1}{2}}$ と定めると，$\|\cdot\|$ は H 上のノルムである．

Def.　**Hilbert 空間**

Prop.　H を内積空間とする．

①（**中線定理**）$\left\|\dfrac{u+v}{2}\right\|^2 + \left\|\dfrac{u-v}{2}\right\|^2 = \dfrac{1}{2}\big(\|u\|^2+\|v\|^2\big).$

②（**polarization**）$4(u,v) = \displaystyle\sum_{k=0}^{3} i^k\|u+i^kv\|^2.$ → 演習問題 No.6 [**37**]

Def.　線形空間 X の部分集合 M が**凸（convex）である**とは……

Th.　H を Hilbert 空間とし，K を H の空でない閉凸集合とする．このとき，K の中にノルム最小の元がただ一つ存在する．

Def.　H を内積空間とし，A を H の部分集合とするとき，$A^{\perp} = \cdots\cdots$

Prop.　H を内積空間，A を H の部分集合とするとき，

① $A^{\perp}$ は H の閉部分空間．　　② $A\cap A^{\perp}\subset\{0\}$. → 演習問題 No.6 [**40**]

Th.　H を Hilbert 空間とし，M を H の閉部分空間とする．このとき，次が成立する．

$$\forall u\in H,\ \exists! u_1\in M,\ \exists! u_2\in M^{\perp}\ \text{s.t.}\ u = u_1+u_2.$$

Def.　**直交補空間（orthogonal complement）**，**直交射影（orthogonal projection）**

Def.　**正規直交系（orthonormal system：ONS）**

Prop.（Bessel の不等式）　$(\phi_n)_{n=1}^{\infty}$ が内積空間 H の正規直交系とするとき，次が成り立つ．

$$\forall u\in H,\ \sum_{n=1}^{\infty}|(u,\phi_n)|^2 \le \|u\|^2.$$

Th./Def.　$\left(\phi_n\right)_{n=1}^{\infty}$ が Hilbert 空間 H の正規直交系とするとき，次の五つの条件は同値である．

① $\overline{\left\{ \sum_{n=1}^{m} c_n\phi_n \,\middle|\, m \in \mathbb{N},\ c_1,\ldots,c_m \in \mathbb{C} \right\}} = H.$

② $\forall u \in H,\ u = \sum_{n=1}^{\infty}(u,\phi_n)\phi_n.$ （収束はノルムの意味）

③ $\forall u,v \in H,\ (u,v) = \sum_{n=1}^{\infty}(u,\phi_n)\overline{(v,\phi_n)}.$ （絶対収束）

④ $\forall u \in H,\ \|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|(u,\phi_n)|^2.$ **（Parseval の等式）**

⑤ $u \in H$ に対し，$u \perp \phi_n\ (\forall n \in \mathbb{N}) \Longrightarrow u = 0.$

この条件が満たされているとき，$\left(\phi_n\right)_{n=1}^{\infty}$ を**完全正規直交系（complete orthonormal system：CONS）**または**正規直交基底（orthonormal basis：ONB）**と呼ぶ．

Th.　$L^2(0,2\pi)$ で $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\right\}$ は完全正規直交系である．→ **Fourier 級数**

Th.（Schmidt の直交化）　Hilbert 空間 H の点列 (u_n) は，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $u_1,\ldots,u_n$ が一次独立であると仮定する．このとき，次が成立する．

$$\exists(\phi_n)\text{：ONS s.t. } \operatorname{span}\{u_1,\ldots,u_n\} = \operatorname{span}\{\phi_1,\ldots,\phi_n\}\ (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Th.　H を無限次元可分 Hilbert 空間とする．このとき，H の完全正規直交系 $\left(\phi_n\right)_{n=1}^{\infty}$ が存在する．

５．有界線形作用素

Th./Def. X, Y をノルム空間，D を X の部分空間とする．このとき，線形写像 $T : D \to Y$ について，次の四つの条件は同値である.（以下，D を $D(T)$ と記述する）

① T は $D(T)$ 上連続である．（$(u_n) \subset D(T), u \in D(T)$ に対して，$u_n \to u \Longrightarrow Tu_n \to Tu$）
② T は 0 において連続である.
③ $\displaystyle\sup_{\|u\|_X=1,\, u\in D(T)} \|Tu\|_Y < \infty.$
④ $\displaystyle\sup_{u\neq 0,\, u\in D(T)} \frac{\|Tu\|_Y}{\|u\|_X} < \infty.$（$\Longleftrightarrow \exists M \geq 0$ s.t. $\forall u \in D(T), \|Tu\|_Y \leq M\|u\|_X$）

この条件が満たされているとき，T を X から Y への**有界線形作用素**と呼ぶ.

Rem. • ③ の左辺は $\displaystyle\sup_{\|u\|_X\leq 1,\, u\in D(T)} \|Tu\|_Y$ としても良い.
• T が X 全体で定義されていなくても $T : X \to Y$ と書く.

Def. X, Y をノルム空間とするとき,

$$B(X,Y) := \{T : X \to Y \mid T \text{ は有界線形作用素，かつ } D(T) = X\},$$
$$B(X) := B(X,X).$$

Def./Prop. X, Y をノルム空間とする．$T, S \in B(X,Y), \alpha \in \mathbb{C}$ に対して

$$\big(T+S\big)(u) = Tu + Su, \quad \big(\alpha T\big)(u) = \alpha\big(Tu\big) \quad (u \in X),$$
$$\|T\| = \sup_{\|u\|_X=1} \|Tu\|_Y = \sup_{\|u\|_X\leq 1} \|Tu\|_Y = \sup_{u\neq 0} \frac{\|Tu\|_Y}{\|u\|_X}$$

とおくと，$\big(B(X,Y), \|\cdot\|\big)$ はノルム空間である． → 演習問題 No.7 [**49**]

Th.（Baire の category 定理） X を完備距離空間，F_n $(n \in \mathbb{N})$ は X の**閉集合**で $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = X$ を満たすと仮定する．このとき，次が成立する.

$$\exists n \in \mathbb{N},\ \exists u \in X,\ \exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } F_n \supset B(u,\varepsilon) = \{v \in X \mid d(u,v) < \varepsilon\}.$$

Th.（一様有界性原理） X, Y を Banach 空間とし，$\big(T_\alpha\big)_{\alpha\in A} \subset B(X,Y)$ を有界線形作用素の族とする．このとき,「$\forall u \in X, \displaystyle\sup_{\alpha\in A} \|T_\alpha u\|_Y < \infty$」が成立するならば，$\displaystyle\sup_{\alpha\in A} \|T_\alpha\| < \infty$ が成立する.

Th.（開写像定理） X, Y を Banach 空間とし，$T \in B(X,Y)$ が**全射**であるとする．このとき，T は**開写像**である（即ち，T は X の開集合を Y の開集合に写す）.

Cor. 開写像定理において，T が**全単射**であるならば，$T^{-1} \in B(Y,X)$ である.

Def.　**閉作用素**

Prop.　T を線形作用素とし，$D(T)$ を T の定義域とする．このとき，T が閉作用素であることと，$G(T) = \{(u, Tu) \in X \times Y \mid u \in D(T)\}$ が閉集合であることは同値である．

Th.（閉グラフ定理）　X, Y を Banach 空間とし，$T : X \to Y$ は閉作用素かつ $D(T) = X$ であるとする．このとき，$T \in B(X, Y)$ である．

６．線形汎関数と共役空間

Th.　X をノルム空間，Y を Banach 空間とする．このとき，$B(X,Y)$ は作用素ノルムをノルムとして Banach 空間である．

Def.　**共役空間** X^*，**有界線形汎関数**

Th.（Riesz の表現定理）　H を Hilbert 空間，$\varphi : H \to \mathbb{C}$ とするとき，次が成立する．

$$\varphi \in H^* \quad \Longleftrightarrow \quad \exists! v \in H \text{ s.t. } \varphi(u) = (u, v) \quad (u \in H).$$

さらに，$\|\varphi\| = \|v\|$ である．

Def.　**第 2 共役空間** X^{**}

Th.（数列空間 ℓ^p の共役空間）　$1 \le p < \infty$ とし，q を $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ $(1 < q \le \infty)$ で定める（ただし $\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{\infty} = 1$ と定める）．このとき，次が成立する．

$$\varphi \in (\ell^p)^* \quad \Longleftrightarrow \quad \exists! y = (y_n) \in \ell^q \text{ s.t. } \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \quad (\forall x = (x_n) \in \ell^p).$$

さらに，$\|\varphi\| = \|y\|_q \, (= \|y\|_{\ell^q})$ である．　$\to$ $\boxed{\therefore (\ell^p)^* \simeq \cdots\cdots}$

Rem.　$p = \infty$ のときは $(\ell^\infty)^* \cong \ell^1$ では**ない**！

Th.（関数空間 $L^p(X)$ の共役空間）　$(X, \mathcal{B}, \mu)$ を σ-finite な測度空間とする（即ち，$\exists X_n \subset X$ $(n \in \mathbb{N})$ s.t. $\mu(X_n) < \infty$ かつ $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$）．

$1 \le p < \infty$ に対して，$L^p(X) = L^p(X, \mu)$ とおく．このとき，$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ を満たす $1 < q \le \infty$ に対して，次が成立する．

$$\varphi \in (L^p(X))^* \quad \Longleftrightarrow \quad \exists! g \in L^q(X) \quad \text{s.t.} \quad \varphi(f) = \int_X f(x) g(x) \, d\mu \quad (\forall f \in L^p(X)).$$

さらに，$\|\varphi\| = \|g\|_q$ である．　$\to$ 補足プリント No.4 $\to$ $\boxed{\therefore (L^p(X))^* \cong L^q(X)}$

Def.　数列空間 c_0

Prop.（数列空間 c_0 の共役空間）

$$\varphi \in (c_0)^* \quad \Longleftrightarrow \quad \exists! y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^1 \text{ s.t. } \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \quad (\forall x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0)$$

さらに，$\|\varphi\| = \|y\|_1$ である．　$\to$ 補足プリント No.5 $\to$ $\boxed{\therefore (c_0)^* \cong \cdots\cdots}$

Th.（Zorn の補題）　→ 補足プリント No.4

Th.（Hahn-Banach の定理）　X を $\mathbb{R}$-線形空間，Y を X の部分空間とする．

$p : X \to \mathbb{R}$ は

$$\begin{cases} p(cu) = cp(u) & (\forall c > 0,\ \forall u \in X), \\ p(u+v) \le p(u) + p(v) & (\forall u, v \in X) \end{cases}$$

を満たし，$\varphi : Y \to \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$-線形写像であり，$\varphi(v) \le p(v)$ $(\forall v \in Y)$ を満たすとする．

このとき，ある $\mathbb{R}$-線形写像 $\overline{\varphi} : X \to \mathbb{R}$ が存在して次を満たす．

$$\begin{cases} \overline{\varphi}(v) = \varphi(v) & (\forall v \in Y), \\ \overline{\varphi}(u) \le p(u) & (\forall u \in X). \end{cases}$$

Th.（Hahn-Banach の定理の複素形）　X を $\mathbb{C}$-線形空間，Y を X の部分空間とする．

$p : X \to \mathbb{R}$ は

$$\begin{cases} p(cu) = |c|p(u) & (\forall c \in \mathbb{C},\ \forall u \in X), \\ p(u+v) \le p(u) + p(v) & (\forall u, v \in X) \end{cases}$$

を満たし，$\varphi : Y \to \mathbb{C}$ は $\mathbb{C}$-線形写像であり，$|\varphi(v)| \le p(v)$ $(\forall v \in Y)$ を満たすとする．

このとき，ある $\mathbb{C}$-線形写像 $\overline{\varphi} : X \to \mathbb{C}$ が存在して次を満たす．

$$\begin{cases} \overline{\varphi}(v) = \varphi(v) & (\forall v \in Y), \\ |\overline{\varphi}(u)| \le p(u) & (\forall u \in X). \end{cases}$$

Th.（Hahn-Banach の定理の幾何学形）　X をノルム空間とする（体は $\mathbb{R}$ でも $\mathbb{C}$ でも良い）．K を X の閉凸集合とし，$u_0 \notin K$ ならば，次が成立する．

$$\exists \varphi \in X^* \text{ s.t. } \begin{cases} \sup_{u \in K} \varphi(u) < \varphi(u_0) & (\mathbb{R}\text{-係数の場合}), \\ \sup_{u \in K} \operatorname{Re} \varphi(u) < \operatorname{Re} \varphi(u_0) & (\mathbb{C}\text{-係数の場合}). \end{cases}$$

Lem.（Minkowski functional）　X をノルム空間とし，K を X の凸部分集合で 0 を内点に含むものとする．いま，$u \in X$ に対し

$$p(u) = \inf\{\alpha > 0 \mid [0, \alpha^{-1}u] \subset K\}$$

と定義する．ただし $[u, v] = \{(1-t)u + tv \mid t \in [0, 1]\}$ と定める．このとき，次が成立する．

① $0 \le p(u) < \infty$ $(\forall u \in X)$.
② $p(u+v) \le p(u) + p(v)$, $p(cu) = cp(u)$ $(\forall u, v \in X,\ \forall c > 0)$.
③ u が K の内点 $\Longrightarrow p(u) < 1$.
④ u が K の外点 $\Longrightarrow p(u) > 1$.
⑤ $\exists c > 0$ s.t. $\forall u \in X$, $p(u) \le c\|u\|$. → 演習問題 No.11 **[75]**

Th.　X をノルム空間とする．このとき，次が成立する．

$$\forall u_0 \in X,\ \exists \varphi \in X^* \text{ s.t. } \varphi(u_0) = \|u_0\| \text{ かつ } \|\varphi\| = 1.$$

Def.　X が**反射的 (reflexive)**である

７．弱収束と汎弱収束

<u>Def.</u>　**<u>弱収束</u>** $\text{w-}\lim_{n\to\infty} u_n = u$, $u_n \rightharpoonup u$，**<u>汎弱収束</u>** $\text{w}^*\text{-}\lim_{n\to\infty} u_n = u$

（<u>cf.</u> 強収束（ノルム収束））

<u>Th.（$\boldsymbol{X^*}$ の汎弱完備性）</u>　X を Banach 空間，$(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ を X^* の点列とする．もし任意の $u \in X$ に対して $\big(\varphi_n(u)\big)_{n=1}^\infty$ が（$\mathbb{C}$ の）Cauchy 列であるならば，(φ_n) はある $\varphi \in X^*$ に汎弱収束する．

<u>Th.（反射的 Banach 空間における閉単位球の弱点列コンパクト性）</u>　X を Banach 空間，$(u_n)_{n=1}^\infty$ を X の点列で $\|u_n\| \leq 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ であるとする．このとき，(u_n) の部分列で弱収束するものが存在する．

　この定理を証明するのに必要な定理が三つある．

<u>Th.</u>　X を反射的 Banach 空間，Y を X の閉部分空間とする．このとき，Y は反射的 Banach 空間である．

<u>Th.</u>　X を Banach 空間とする．このとき，もし X^* が可分ならば X は可分である．

<u>Th.（可分 Banach 空間の共役空間における閉単位球の汎弱点列コンパクト性）</u>　X を可分 Banach 空間とし，$(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ を X^* の点列で $\|\varphi_n\| \leq 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ であるとする．このとき，(φ_n) の部分列で汎弱収束するものが存在する．

８．コンパクト作用素

Def. X, Y：ノルム空間に対し，線形作用素 $T : X \to Y$ が**コンパクト**であるとは……

Rem. コンパクト作用素は有界作用素である． → 演習問題 No.13 [**90**]

Ex. T の値域 TX が有限次元ならば T はコンパクト → 「finite rank をもつ」という．

☆ Ascoli-Arzelà の定理

Ω を $\mathbb{R}^N$ の有界開集合，(f_n) を $\overline{\Omega}$ 上の関数列とする[1]．

Def. (f_n) が $\overline{\Omega}$ 上で**一様有界**である $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists C > 0$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \overline{\Omega}, |f_n(x)| \le C.$

Def. (f_n) が $\overline{\Omega}$ 上で**同程度連続**である
$\overset{\text{def}}{\iff}$ 「$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x, x' \in \overline{\Omega}, |x - x'| < \delta \Longrightarrow |f_n(x) - f_n(x')| < \varepsilon.$」

Def.（Ascoli-Arzelà の定理）

Ω を $\mathbb{R}^N$ の有界開集合とする．$\overline{\Omega}$ 上の関数列 (f_n) が $\overline{\Omega}$ 上で一様有界かつ同程度連続ならば，(f_n) は $\overline{\Omega}$ 上で一様収束する部分列を含む．

Th. $T \in B(X, Y)$, $R \in B(Y, Z)$ とする．
① T がコンパクト $\Longrightarrow$ RT もコンパクト．
② R がコンパクト $\Longrightarrow$ RT もコンパクト． → 演習問題 No.13 [**91**]

Th. $T, S, T_n \in B(X, Y)$ $(n \in \mathbb{N})$ とする．
① T, S がコンパクト，$\alpha \in \mathbb{C} \Longrightarrow T + S$, αT もコンパクト． → 演習問題 No.13 [**91**]
② T_n がコンパクト $(\forall n \in \mathbb{N})$ かつ $\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0 \Longrightarrow T$ もコンパクト．

Def. H を Hilbert 空間，$T \in B(H)$ とするとき，T の**スペクトル** $\sigma(T)$ とは……

Th. H を Hilbert 空間，$T \in B(H)$ とする．
① $\sigma(T)$ は高々可算．
② 0 でない $\sigma(T)$ の元は多重度有限の固有値である．
（i.e. $Tu = \lambda u$ を満たす $u \neq 0$ が存在し，かつ $Tu = \lambda u$ を満たす u 全体の集合は有限次元）
③ $\sigma(T)$ は 0 以外に集積点をもたない．

[1]コンパクト距離空間上の関数列に対しても同様の結果が成立します．