数理解析学 A・数理解析基礎講義 A　補足プリント　No.7（2024.5.21 配布）

プリントは http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R6SuurikaisekiA.html にも置いてあります．

● ℓ^1 が反射的でないことの証明

$(\ell^1)^{**} \not\cong \ell^1$ であることを示す．$(\ell^1)^* \cong \ell^\infty$ であるから，$\boxed{(\ell^\infty)^* \not\cong \ell^1}$ であることを示せばよい．$(\ell^\infty)^* \cong \ell^1$ であるとは

$$\forall \varphi \in (\ell^\infty)^*,\quad \exists y = (y_n)_{n=1}^\infty \in \ell^1 \ \text{ s.t. }\ \varphi(x) = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n \quad (\forall x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty)$$

ということであるから，その否定を示す．

これから，ある ℓ^∞ 上の有界線形汎関数を構成するのだが，まずは

$$X = \ell^\infty_{\mathbb{R}} = \{(x_n) \in \ell^\infty \mid (x_n) \text{ は有界実数列}\}$$

とおく（注：ℓ^∞ は有界な<u>複素数列</u>全体の集合です．一方 $\ell^\infty_{\mathbb{R}}$ は有界な<u>実数列</u>全体の集合）と，X は実 Banach 空間である．その部分空間 Y と，$\mathbb{R}$-線形写像 $\varphi_0 : Y \to \mathbb{R}$ を

$$Y = \left\{ (x_n) \in X \,\middle|\, \lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \text{ が存在} \right\},$$

$$\varphi_0(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \quad (x = (x_n) \in Y)$$

と定める．次に，$p : X \to \mathbb{R}$ を次で定義する：

$$p(x) = \limsup_{n\to\infty} x_n \qquad (x = (x_n) \in X).$$

すると，p は

$$p(cx) = p(x), \qquad p(x+y) \le p(x) + p(y) \qquad (\forall x, y \in X,\ \forall c > 0)$$

を満たすことが（上極限の定義を用いれば）わかる[1]．また，任意の $x \in Y$ に対して

$$\varphi_0(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \le \limsup_{n\to\infty} x_n = p(x)$$

が成り立つ[2]．従って，$\mathbb{R}$-線形空間の場合の Hahn-Banach の定理より，ある $\mathbb{R}$-線形写像 $\varphi : X \to \mathbb{R}$ で，φ_0 の拡張になっていて，かつ $\varphi(x) \le p(x) = \limsup_{n\to\infty} x_n$ $(\forall x = (x_n) \in X)$ が成り立つものが存在する．

このとき，任意の $x \in X$ に対し，$-\varphi(x) = \varphi(-x) \le \limsup_{n\to\infty}(-x_n) = -\liminf_{n\to\infty} x_n$ であるから

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} x_n \le \liminf_{n\to\infty} x_n \le \varphi(x) \le \limsup_{n\to\infty} x_n \le \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n$$

がわかる．これは $|\varphi(x)| \le \|x\|_\infty$ を意味するので，φ は $X = \ell^\infty_{\mathbb{R}}$ 上の有界線形汎関数である．

---

[1] p はノルムの性質は満たしません．実際，p は負の値も取り得ます．

[2] 問：なぜでしょうか？

さて，ℓ^∞ 上の有界線形汎関数を作るのだったが，任意の ℓ^∞ の元を実部と虚部に分けて上のような線形写像を考えれば，ℓ^∞ 上の有界線形汎関数が構成できる．これを改めて $\varphi\,(\in(\ell^\infty)^*)$ とおく．φ は次の四つの条件を満たす[3]．

(i) φ は $\mathbb{C}$-線形．即ち，$\varphi(\alpha x+\beta y)=\alpha\varphi(x)+\beta\varphi(y)$ $(\forall\alpha,\beta\in\mathbb{C},\forall x,y\in\ell^\infty)$.
(ii) $x=(x_n)\in\ell^\infty$ が $x_n\geq 0$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ を満たせば $\varphi(x)\geq 0$.
(iii) $\varphi(x)=\varphi(Sx)$ $(\forall x\in\ell^\infty)$．ただし，$(Sx)_n=x_{n+1}$ (shift operator).
(iv) $x=(x_n)\in\ell^\infty$ が収束数列ならば，$\varphi(x)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(iii) のみ証明する．$y=x-Sx=\bigl(x_1-x_2,x_2-x_3,\ldots,x_n-x_{n+1},\ldots\bigr)$ とおくと，

$$\begin{aligned}\left|\frac{y_1+\cdots+y_n}{n}\right|&=\left|\frac{(x_1-x_2)+(x_2-x_3)+\cdots+(x_n-x_{n+1})}{n}\right|\\&=\left|\frac{x_1-x_{n+1}}{n}\right|\leq\frac{2\|x\|_\infty}{n}\to 0\quad(n\to\infty)\end{aligned}$$

であるから，$y\in Y$．従って φ_0 の定義より $\varphi(y)=\varphi_0(y)=0$ である．故に $\varphi(x)=\varphi(Sx)$ である．

いま，$\exists y=(y_n)\in\ell^1$ s.t. $\varphi(y)=\displaystyle\sum_{n=1}^\infty x_ny_n$ $(\forall x=(x_n)\in X)$ であると仮定する．特に $x=\bigl(1,0,0,\ldots\bigr)$ とおくと $\varphi(x)=y_1$．一方，$\varphi(x)=\varphi(Sx)=\varphi\bigl(\bigl(0,1,0,\ldots\bigr)\bigr)=y_2$．以下同様にして $y_1=y_2=\cdots=y_n=\cdots$ が得られる．

ところが，$y\in\ell^1$ であるから $y_1=y_2=\cdots=y_n=\cdots=0$，即ち $y=0$ を意味するが，$\varphi\neq 0$ であったからこれは矛盾．従って $(\ell^\infty)^*\not\cong\ell^1$ である． $\square$

[3] この四つの条件を満たす ℓ^∞ から $\mathbb{C}$ への写像（または $\ell^\infty_{\mathbb{R}}$ から $\mathbb{R}$ への写像）を **Banach 極限**と呼びます．これは通常の極限の一般化と言えるものとなっています．