数理解析学 A・数理解析基礎講義 A　補足プリント　No.6 （2024.5.16 配布）

プリントは http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R6SuurikaisekiA.html にも置いてあります.

● c_0 の共役空間

数列空間 c_0 を

$$c_0 = \left\{ x = \left(x_n\right)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \;\middle|\; \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \right\}$$

と定義すると，演習問題 No.5 [**32**], [**33**] の結果により，ℓ^∞ の閉部分空間となります．従って，ℓ^∞ のノルム（i.e. $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$）により c_0 は Banach 空間であることが分かります．

命題．

$$\varphi \in (c_0)^* \iff \exists y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^1 \text{ s.t. } \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \quad \left(\forall x = \left(x_n\right)_{n=1}^{\infty} \in c_0\right)$$

さらに，$\|\varphi\| = \|y\|_1$ が成立する．

注意． つまり $\boxed{(c_0)^* \cong \ell^1}$ が成立します．なお，$(\ell^\infty)^* \cong \ell^1$ は**成立しません**（証明はおそらく次回の補足プリントにて）．また，$\varphi \in (c_0)^*$ に対して上を満たす y は一意に定まります．

[証明]　($\Longleftarrow$)　有界性は $|\varphi(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n||y_n| \leq \|x\|_\infty \|y\|_1$ より言える．線形性は自明．

これより $\|\varphi\| \leq \|y\|_1$ が示されるが，先に $\|\varphi\| \geq \|y\|_1$ を示す．

$y_n = |y_n| e^{i\theta_n}$ となる $\theta_n \in \mathbb{R}$ を取る．このとき，$k \in \mathbb{N}$ に対して

$$x^{(k)} = (e^{-i\theta_1}, \dots, e^{-i\theta_k}, 0, 0, \dots)$$

とおくと，$x^{(k)} \in c_0$ かつ $\|x^{(k)}\|_\infty = 1$ であり，

$$\varphi(x^{(k)}) = \sum_{j=1}^{k} e^{-i\theta_j} y_j = \sum_{j=1}^{k} |y_j|$$

が成り立つ．従って，

$$\|\varphi\| = \sup_{x \in c_0,\, \|x\|_\infty = 1} |\varphi(x)| \geq |\varphi(x^{(k)})| = \sum_{j=1}^{k} |y_j|.$$

これが任意の $k \in \mathbb{N}$ について成立するので，$\|\varphi\| \geq \sum_{j=1}^{\infty} |y_j| = \|y\|_1$ を得る．

($\Longrightarrow$)　任意に $\varphi \in (c_0)^*$ を取る．5/14 の授業と同様に $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in c_0$（第 n 項のみ 1，その他は 0 である数列）に対し $\varphi(e_n) = y_n$ とおく．

$x = \{x_n\} \in c_0$ に対し，$\xi^{(n)} = (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$ $(n \in \mathbb{N})$ とおくと，$\xi^{(n)} \in c_0$ で

$$\|x - \xi^{(n)}\|_\infty = \sup_{k \geq n+1} |x_k| \to 0 \quad (n \to \infty) \qquad (\because\ x \in c_0)$$

であるから，φ の連続性と線形性より

$$\varphi(x) = \varphi\left(\lim_{n\to\infty} \xi^{(n)}\right) = \lim_{n\to\infty} \varphi(\xi^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

最後に $y \in \ell^1$ を示す必要があるが，先程の議論とほぼ同様なので各自に任せる．　■