数理解析学 A・数理解析基礎講義 A　補足プリント　No.5（2024.5.14 配布）

プリントは http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R6SuurikaisekiA.html にも置いてあります．

● $L^p(X)$ の共役空間

定理． $(X,\mathcal{B},\mu)$ を σ-finite な測度空間とする．

（即ち，$\exists X_n \subset X$ $(n\in\mathbb{N})$ s.t. $\mu(X_n)<\infty$ かつ $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$）

$1\le p<\infty$ に対して，$L^p(X)=L^p(X,\mu)$ とおく．このとき，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ を満たす $1<q\le\infty$ に対して，次が成立する：

$$\varphi\in(L^p(X))^* \iff \exists g\in L^q(X)\ \text{ s.t. }\ \varphi(f)=\int_X f(x)g(x)\,d\mu \quad (\forall f\in L^p(X)).$$

さらに，$\|\varphi\|=\|g\|_q$ が成立する．

注意． つまり $(L^p(X))^*\cong L^q(X)$ が成立します．なお，$p=\infty$ の場合は $(L^\infty(X))^*$ と $L^1(X)$ は同型になりません．また，σ-finiteness という仮定がありますが，例えば X が $\mathbb{R}^N$ の Lebesgue 可測集合で μ が N 次元 Lebesgue 測度であれば O.K. です．

[証明]　$(\Longleftarrow)$　$g\in L^q(X)$ に対して φ を上のように定めると

$$|\varphi(f)|\le\int_X |f(x)||g(x)|\,d\mu\le\|g\|_q\|f\|_p \quad （\because \text{ Hölder の不等式}）$$

であり，これは $\varphi\in(L^p(X))^*$ であり $\|\varphi\|\le\|g\|_q$ を意味する．次に $\|g\|_q\le\|\varphi\|$ を示す．

(i) $p=1$ のとき　$\|g\|_\infty=0$ であれば $g=0$ a.e. であるから $\varphi=0=\|g\|_\infty$．

以下，$\|g\|_\infty>0$ の場合を考える．任意に $0<\varepsilon<\|g\|_\infty$ を取る．$A=\{x\in X \mid |g(x)|>\|g\|_\infty-\varepsilon\}$ とおくと，$\|g\|_\infty$ の定義より $\mu(A)>0$ である．

いま，$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}(A\cap X_n)=A\cap\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n=A\cap X=A$ であるから，$\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $\mu(A\cap X_N)>0$ である（さもなくば μ の劣加法性より $\mu(A)=0$ となる）．ここで，$\mu(A\cap X_N)\le\mu(X_N)<\infty$ に注意する．

$B:=A\cap X_N$ とおく．さらに $g(x)=|g(x)|h(x)$（ただし $|h(x)|=1$）と書いたとき，$F:=\chi_B\cdot\overline{h}$ とおくと，$\|F\|_1=\mu(B)<\infty$ であるから $F\in L^1(X)$ であり，

$$\begin{aligned}\varphi(f)=\int_X f(x)g(x)\,d\mu&=\int_X \chi_B(x)\overline{h(x)}|g(x)|h(x)\,d\mu\\&=\int_B |g(x)|\,d\mu\ge(\|g\|_\infty-\varepsilon)\mu(B)=(\|g\|_\infty-\varepsilon)\|F\|_1.\end{aligned}$$

両辺 $\|F\|_1$ で割ると

$$\|g\|_\infty-\varepsilon\le\frac{|\varphi(F)|}{\|F\|_1}\le\sup_{f\ne0}\frac{|\varphi(f)|}{\|f\|_1}=\|\varphi\|.$$

$\varepsilon\to+0$ として $\|g\|_\infty\le\|\varphi\|$ を得る．

(ii) $p\ne1$ のとき　$\|g\|_q=0$ のときは先程と同様に O.K.

以下，$\|g\|_q > 0$ とする．$g(x) = |g(x)|h(x)$ ($|h(x)| = 1$) と書いたとき，$F := |g|^{q/p} \cdot \overline{h}$ とおくと，

$$\|F\|_p = \left(\int_X (|g|^{q/p}|h|)^p \, d\mu \right)^{1/p} = \left(\|g\|_q^q \right)^{1/p} = \|g\|_q^{q/p}$$

である（特に $F \in L^p(X)$）．さらに

$$\varphi(F) = \int_X |g(x)|^{q/p}\overline{h(x)}|g(x)|h(x) \, d\mu = \int_X |g(x)|^{1+q/p} \, d\mu = \int_X |g(x)|^q \, d\mu = \|g\|_q^q$$

であるから，

$$\|\varphi\| = \sup_{f \neq 0} \frac{|\varphi(f)|}{\|f\|_p} \geq \frac{|\varphi(F)|}{\|F\|_p} = \frac{\|g\|_q^q}{\|g\|_q^{q/p}} = \|g\|_q$$

を得る．

逆向きの矢印を証明する前に，測度論において極めて重要な **Radon-Nikodym の定理**を紹介する．

$(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とする．集合関数 $\Phi : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ が

$$E_n \in \mathcal{B} \ (\forall n \in \mathbb{N}) \text{ かつ } (E_n) \text{ が互いに素} \implies \Phi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(E_n) \text{（絶対収束）}$$

を満たすとき，Φ を X 上の**（複素数値）加法的集合関数**と呼ぶ．また，集合関数 $\Phi : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ が

$$\mu(E) = 0 \implies \Phi(E) = 0$$

を満たすとき，Φ は μ に関して**絶対連続**であるという．

定理．(Radon-Nikodym) $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を σ-finite な測度空間とする．$\Phi : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ が絶対連続な加法的集合関数であるならば，ある $g \in L^1(X)$ が存在して

$$\Phi(E) = \int_E g(x) \, d\mu$$

が成立する．(また，g は μ-零集合上での違いを除いて一意に定まる)

($\Longrightarrow$)　任意に $\varphi \in (L^p(X))^*$ を取る．

① $\mu(X) < \infty$ のとき

$E \in \mathcal{B}$ に対して $\chi_E \in L^p(X)$ である（$\mu(E) \leq \mu(X) < \infty$ に注意）ので，$\nu(E) = \varphi(\chi_E) \in \mathbb{C}$ が定義できる．この ν が絶対連続な加法的集合関数であることを示す．

(i) ν が加法的集合関数であること

$E_n \in \mathcal{B}$ ($n \in \mathbb{N}$) が互いに素であるとする．$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \leq \mu(X) < \infty$ であることに注意すると，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n} = \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}$ が $L^p(X)$-ノルムで成立している[1]．

[1]問 1：これを示せ．なお，$p = \infty$ では成立しないので，ここで $1 \leq p < \infty$ であることを用いている．

φ の連続性より，

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \varphi\left(\chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}\right) = \varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\chi_{E_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$$

が成立する．

(ii) ν が μ に関して絶対連続であること

$\mu(E) = 0$ と仮定する．すると $\chi_E = 0$ a.e. であるから，$\nu(E) = \varphi(\chi_E) = \varphi(0) = 0$.

以上より Radon-Nikodym の定理が適用できて，

$$\exists g \in L^1(X) \quad \text{s.t.} \quad \varphi(\chi_E) = \nu(E) = \int_E g(x)\, d\mu = \int_X \chi_E(x) g(x)\, d\mu \quad (\forall E \in \mathcal{B})$$

が成立する．

次に，単関数 $f = \sum_{n=1}^{m} a_n \chi_{E_n}$ を考えると，φ の線形性から

$$\begin{aligned}\varphi(f) = \varphi\left(\sum_{n=1}^{m} a_n \chi_{E_n}\right) &= \sum_{n=1}^{m} a_n \varphi(\chi_{E_n}) \\ &= \sum_{n=1}^{m} a_n \int_X \chi_{E_n}(x) g(x)\, d\mu \\ &= \int_X \left(\sum_{n=1}^{m} a_n \chi_{E_n}(x)\right) g(x)\, d\mu = \int_X f(x) g(x)\, d\mu\end{aligned}$$

が成立する。ここで任意の $f \in L^\infty(X)$ に対して f は単関数列で（L^∞-ノルムで）近似できるわけだが，$\mu(X) < \infty$ より L^p-ノルムでも近似できるので，φ の連続性より

$$\varphi(f) = \int_X f(x) g(x)\, d\mu \quad (\forall f \in L^\infty(X))$$

を得る．次にこの g が $L^q(X)$ の元であることを示す．

• $1 < p < \infty$ のとき（即ち $1 < q < \infty$）

$n \in \mathbb{N}$ に対して

$$g_n(x) := \begin{cases} g(x) & (|g(x)| \leq n) \\ 0 & (|g(x)| > n) \end{cases}$$

とおく．さらに，$g(x) = |g(x)| h(x)$（ただし $|h(x)| = 1$）と書いたとき，$f_n = |g_n|^{q/p} \cdot \overline{h}$ とおく．すると $g_n \in L^\infty(X)$ より $f_n \in L^\infty(X)$ であるから，

$$\varphi(f_n) = \int_X f_n(x) g(x)\, d\mu = \int_X |g_n(x)|^{q/p} \overline{h(x)} |g(x)| h(x)\, d\mu = \int_X |g_n(x)|^{1+q/p}\, d\mu = \|g_n\|_q^q.$$

一方，$|\varphi(f_n)| \leq \|\varphi\| \|f_n\|_p = \|\varphi\| \left(\int_X |g_n(x)|^q\, d\mu\right)^{1/p} = \|\varphi\| \|g_n\|_q^{q/p}$ であるので，

$$\|g_n\|_q^q \leq \|\varphi\| \|g_n\|_q^{q/p}. \qquad \therefore \ \|g_n\|_q \leq \|\varphi\|. \quad (\leftarrow \|g_n\|_q = 0 \text{ でも成立})$$

即ち，$\displaystyle\int_X |g_n(x)|^q\, d\mu \le \|\varphi\|^q$ であるので，両辺の $n\to\infty$ の極限を取ると，単調収束定理より

$$\int_X |g(x)|^q\, d\mu \le \|\varphi\|^q$$

が得られ，$g\in L^q(X)$ が示された．

$\underline{\bullet\ p=1\ \text{のとき（即ち}\ q=\infty\text{）}}$

任意の $E\in\mathcal{B}$ に対して

$$\left|\int_E g(x)\, d\mu\right| = |\varphi(\chi_E)| \le \|\varphi\|\|\chi_E\|_1 = \|\varphi\|\mu(E).$$

従って $\mu(E)>0$ ならば

$$\left|\frac{1}{\mu(E)}\int_E g(x)\, d\mu\right| \le \|\varphi\|$$

が成立する．これより $|g(x)|\le\|\varphi\|$ a.e. $x\in X$ を得る[2]．故に $g\in L^\infty(X)$．

以上の結果,

$$\exists g\in L^q(X)\ \ \text{s.t.}\ \ \varphi(f)=\int_X f(x)g(x)\, d\mu \quad \underline{(\forall f\in L^\infty(X))} \qquad \cdots\cdots(*)$$

がわかった．ここで，この式の両辺とも L^p 上連続な汎関数である（左辺の連続性は $\varphi\in(L^p(X))^*$ より，右辺の連続性は $(\Longleftarrow)$ の議論より）ことと，$L^\infty(X)$ が $L^p(X)$ において稠密であることより，$(*)$ は $\underline{\forall f\in L^p(X)}$ で成立する[3]．

$\underline{\text{②}\ X\ \text{が}\ \sigma\text{-finite のとき}}$

仮定より $X=\displaystyle\bigcup_{n=1}^\infty X_n$, $\mu(X_n)<\infty$ $(\forall n\in\mathbb{N})$, $X_n\subset X_{n+1}$ $(n\in\mathbb{N})$ を満たす $X_n\in\mathcal{B}$ を取ることができる[4]．

$\varphi\in(L^p(X))^*$ は $(L^p(X_n))^*$ の元ともみなせる．これに①の結果を適用すると，

$$\exists g_n\in L^p(X_n)\quad \text{s.t.}\quad \varphi(f)=\int_{X_n} f(x)g_n(x)\, d\mu \quad (\forall f\in L^p(X_n)\subset L^p(X))$$

が言える．すると，①の問 3 の結果より $g_{n+1}(x)=g_n(x)$ $(\forall x\in X_n)$ がわかる．そこで，$g(x)=g_n(x)$ (if $x\in X_n$) とおけば，g は X 上の可測関数として well-defined である．

次に $(\Longleftarrow)$ の議論より

$$\|g_n\|_q = \left\|\varphi\big|_{L^p(X_n)}\right\| \le \|\varphi\| \quad (\forall n\in\mathbb{N})$$

である．もし $q=\infty$ なら $\|g\|_\infty=\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}}\|g_n\|_\infty\le\|\varphi\|$ であり，$1<q<\infty$ なら①のように単調収束定理を用いて $\|g\|_q\le\|\varphi\|$ が示せる．従ってどちらの場合も $g\in L^q(X)$ である．

以上の結果,

$$\exists g\in L^q(X)\ \ \text{s.t.}\ \ \varphi(f)=\int_X f(x)g(x)\, d\mu \quad \underline{(\forall f\in L^p(X_n))} \qquad \cdots\cdots(**)$$

が任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して成立することがわかった．最後に，$\displaystyle\bigcup_{n=1}^\infty L^p(X_n)$ が $L^p(X)$ で稠密である[5]ことを用いると，$(**)$ は $\underline{\forall f\in L^p(X)}$ で成立することがわかる．　□

---

[2]問 2：これを示せ．これは測度論の良い演習問題である．

[3]問 3：$(*)$ を満たす g は（測度 0 の集合上での違いを除いて）一意であることを示せ．

[4]問 4：なぜか？

[5]問 5：これを示せ．なお，ここでも $p\ne\infty$ であることを用いている．

● Zorn の補題

Hahn-Banach の定理を証明するのに必要な，集合論における **Zorn の補題**を紹介します．これは Zermelo の選択公理と同値であり，ここでも公理として認めることとします．

集合 $\mathcal{A}$ において，$\mathcal{A}$ の 2 つの要素の間に関係 $\leq$ が定められており，任意の $a, b \in A$ に対して「$a \leq b$ である」か「$a \leq b$ でない」のどちらか一方のみが成立しており，さらに，任意の $a, b, c \in \mathcal{A}$ に対して

(i) $a \leq a$ **（反射律）**
(ii) $a \leq b$ かつ $b \leq a \implies a = b$ **（反対称律）**
(iii) $a \leq b$ かつ $b \leq c \implies a \leq c$ **（推移律）**

が成り立っているとき，関係 $\leq$ を $\mathcal{A}$ における**（半）順序**といい，$\mathcal{A}$ または $(\mathcal{A}, \leq)$ を**（半）順序集合**という．

$\mathcal{A}$ を順序集合とし，$\mathcal{A}_0$ を $\mathcal{A}$ の部分集合とする．任意の $a, b \in \mathcal{A}_0$ に対して,「$a \leq b$」または「$b \leq a$」が成り立つとき，$\mathcal{A}_0$ は $\mathcal{A}$ の**全順序部分集合**という．

また，$\mathcal{A}_1$ を順序集合 $\mathcal{A}$ の部分集合とし，$a \in \mathcal{A}$ に対して，

$$x \in \mathcal{A}_1 \quad \implies \quad x \leq a$$

が成り立つとき，a は $\mathcal{A}_1$ の**上界**であるという．

さらに，$a \in \mathcal{A}$ に対して，

$$x \in \mathcal{A} \text{ かつ } a \leq x \quad \implies \quad x = a$$

が成り立つとき，a は $\mathcal{A}$ の**極大元**であるという．

定理.（Zorn の補題）

$\mathcal{A}$ を空でない順序集合とする．このとき，$\mathcal{A}$ の任意の全順序部分集合が上界をもつならば，$\mathcal{A}$ には極大元が存在する．